目　录

第二版说明……1
第一版序……1
第一章　集合及其基数……1
§1　集合及其运算……1
§2　集合的基数……12
§3　可数集合……18
§4　不可数无穷集……22
第二章　n维空间中的点集……27
§1　聚点、内点、边界点、Bolzano-Weierstrass定理……28
§2　开集、闭集与完备集……32
§3　p进位表数法……39
§4　一维开集、闭集、完备集的构造……43
§5　点集间的距离……45
第三章　测度理论……49
§1　外测度……50
§2　可测集合……55
§3　开集的可测性……68
§4　乘积空间……73
*§5　集合环上的测度的扩张……80
第四章　可测函数……101
§1　可测函数的定义及其简单性质……101
§2　Egoroff定理……111
§3　可测函数的结构　Lusin定理……116
§4　依测度收敛……120
第五章　积分理论……127

§1 非负函数的积分……127
§2 可积函数……144
§3 Fubini 定理……163
§4 微分与不定积分……171
*§5 一般测度空间上的 Lebesgue 积分……196
第六章 函数空间 L^p……217
§1 空间 L^p……218
§2 Hilbert 空间 L^2……236
*§3 Zorn 引理 L^2 中基底的存在性……257
***第七章 Fourier 级数与 Fourier 变换**……261
§1 Fourier 级数的收敛判别……261
§2 Fourier 级数的 C-1 求和……269
§3 $L^1(\mathbf{R}^1)$上的 Fourier 变换……277
§4 $L^2(\mathbf{R}^1)$上的Fourier 变换……293
参考书目与文献……301
索引……303

第一章 集合及其基数

实变函数论是在集合论的观点与方法渗入数学分析的过程中产生的. 对特定的集合按某种要求作分解与组合，是实变函数论中的一种基本的论证手法，因此我们现在先介绍一些有关集合论的基本知识.

§1 集合及其运算

一个集合是被我们看成了一个单一整体的一些“事物”. 这些“事物”称为这个集合的**元素**. 如果 A 是一个集合，x 是 A 的元素，则记为 $x\in A$. 读作“x 属于 A”; x 不是 A 的元素这一事实记为 $x\overline{\in}A$ 或 $x\notin A$，读作“x 不属于 A”.

我们说集合 A 已经给定，就是说对于任意“事物”x，我们都能鉴别 x 是否是 A 的元素，即鉴别 $x\in A$ 和 $x\overline{\in}A$ 中是哪一个成立. 一般说来，这两个式子中应该有一个而且只有一个成立.

上面我们把集合“看成了一个单一整体”是说我们认为集合和组成这个集合的那些元素是不同的. 我们着眼的不是这些元素中一个个的“事物”，而是认为这些“事物”已组成了一个整体. 因此如果 x 是某一“事物”，当我们说“以 x 为元素构成一集合”时，这个集合和 x 本身就是不同的东西了，尽管这个集合中就只有一个元素 x.

我们可以用已有的“事物”作元素构造各种各样的集合. 例如将 1,2,3 三个数放在一起看成一个整体，便得到一个集合，可以记为$\{1, 2, 3\}$. 此处我们用$\{\ \ \}$表示把括号中的那些“事物”放在一起看成一个整体的意思. 这种用加上括号来表示构成集合的办

法，我们以后将经常引用．如$\{2,4,6,8\}$，$\left\{\frac{1}{n};n=1,2,\cdots\right\}$分别表示由2，4，6，8这四个数组成的集合和由$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$这样的无穷多个数组成的集合．一般说来，如果$p(x)$是一个与$x$有关的条件（或命题），则所有合乎这个条件（或使这个命题成立）的x所构成的集合便记之为$\{x;p(x)\}$．例如当$p(x)$是"数x的平方等于1"这一条件时，$\{x;p(x)\}$就是$\{-1,1\}$．又如果E是一个事先给定了的集合，则$E[x;p(x)]$便表示E中所有使条件$p(x)$满足的x所构成的集合，也就是$\{x;x\in E,p(x)\}$．例如当$f(x)$是一个给定的实函数且a是一个常数时，$E[x;f(x)>a]$就是E中那些使$f(x)$大于a的x所构成的集合．自然这里的E应是某个已事先给定了的集合．

我们说两个集合A和B是**相等的**，记为$A=B$，就是说它们所包含的元素相同，即它们实际上是同一个集合．例如$\{x;\ x^2=1\}=\{-1,1\}$．

设A,B是两个集合，如果属于A的元素都属于B，则说A**包含于**B或A是B的**子集**，记为$A\subset B$，A包含于B也可以说成B**包含**A，而记为$B\supset A$．

不含任何元素的集合称为**空集**或**虚无集**，记作$\varnothing$．它是任何集合的子集．

对于任何集合A，$A\supset A$总成立，所以A也是A本身的子集，如果$B\subset A$，$B\neq A$，即B是A的子集，但B还不等于A，则说B是A的**真子集**．

下述两个定理是显然成立的．

定理1　$A=B$的充要条件是$A\subset B$，且$B\subset A$．

定理2　如果$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$．

设A,B是两个给定的集合，将它们所共有的元素拿来构成一

个新的集合，称为 A 和 B 的**交**，记作 $A\cap B$ 或 AB，因此

$$A\cap B=\{x;x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

例如 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，$C=\{6,7,8\}$，则

$$A\cap B=\{3,4\},B\cap C=\{6\},A\cap C=\varnothing.$$

一般说来，如果 Λ 是一集合，对于每一 $\lambda\in\Lambda$，都相应地给定了一个集合 A_λ，则我们就说给定了(以 Λ 为下标集的) **一族集合**. 这时这族集合的交定义为

$$\{x;\text{对每一 } \lambda\in\Lambda, \text{都有 } x\in A_\lambda\},$$

记为 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$. 如果 $\Lambda=\{1,2,\cdots,n\}$ 或 $\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$，则上述交就分别简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_\lambda$ 和 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 所以

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{x;\text{对任何正整数 } n, \text{ 都有 } x\in A_n\}.$$

例 1 若 $A_n=\{x;0\leqslant x<1+\frac{1}{n}\}$，$n=1,2,3,\cdots$，则

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\{x;0\leqslant x<1+\frac{1}{n}\}=A_n,\ \bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{x;0\leqslant x\leqslant 1\}.$$

例 2 若 $A_n=\left\{x;n\leqslant x\leqslant n+\frac{3}{2}\right\}$，$n=1,2,3,\cdots$，则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing.$$

例 3 若 $A_n=\{x;-\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}\}$，$n=1,2,3,\cdots$，则

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\{x;-\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}\},\ \bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{0\}.$$

例 4 若 Λ 是全体实数所构成的集合，$A_\lambda=\{x;\lambda\leqslant x<\infty\}$，$\lambda\in\Lambda$，则

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\varnothing.$$

两个集合A和B的并定义为

$$\{x; x\in A \text{ 或 } x\in B\},$$

记为$A\cup B$. 例如$\{1,2,3,4\}\cup\{3,4,5,6\}=\{1,2,3,4,5,6\}$ 同样，以Λ为下标集的一族集合$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$的并就是

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\{x;\text{有 }\lambda\in\Lambda,\text{使}x\in A_\lambda\}.$$

当$\Lambda=\{1,2,\cdots,n\}$或$\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$时，分别有

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\{x;\text{有 } i\leqslant n,\text{使 } x\in A_i\},$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\{x;\text{有正整数 } n,\text{使 } x\in A_n\}.$$

例 5 若$A_n=\{x; n-1<x\leqslant n\}, n=1,2,3,\cdots$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\{x; 0<x<\infty\}=(0,\infty).$$

例 6 若$A_n=\left\{-1+\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1-\frac{1}{n}\right\}, n=1,2,3,\cdots$，则

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\left\{x; -1+\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1-\frac{1}{n}\right\}=A_n=\left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right],$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\{x; -1<x<1\}=(-1,1).$$

例 7 设Λ是大于零而小于1的全体有理数构成的集合，$A_\lambda=\{x; \frac{\lambda}{2}<x<2\lambda\}, \lambda\in\Lambda$. 则

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=(0,2).$$

当 $A\cap B=\varnothing$ 时，我们说 A 和 B 不（相）交．对于集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，如果对任意 $\lambda',\lambda''\in\Lambda,\lambda'\neq\lambda''$，都有 $A_{\lambda'}\cap A_{\lambda''}=\varnothing$，则说这族集合是互不相交的或两两不交的．

根据交与并的定义立即可得：

定理 3 下列各式恒成立：

(1) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$, $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(2) $A\cap(B\cup C)=(B\cup C)\cap A=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(3) $A\cup A=A, A\cap A=A$.

定理 4

(1) $A\cap B\subset A\subset A\cup B$.

(2) 若 $A_\lambda\subset B_\lambda$ $(\lambda\in\Lambda)$，则 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$. 特别是若 $A_\lambda\subset C$ $(\lambda\in\Lambda)$，则 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\subset C$.

(3) 若 $A_\lambda\subset B_\lambda$ $(\lambda\in\Lambda)$，则 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\subset\bigcap_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$，特别是若 $C\subset B_\lambda$ $(\lambda\in\Lambda)$，则 $C\subset\bigcap_{\lambda\in\Lambda}B$

(4) $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\cup B_\lambda)=\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)\cup\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)$.

(5) $A\cap\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A\cap B_\lambda)$.

证明 以(2)，(5)的证明为例．先证(2)，由并的定义，如果 $x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$，则应有 $\lambda'\in\Lambda$; 使 $x\in A_{\lambda'}$．而 $A_{\lambda'}\subset B_{\lambda'}$，所以有 $x\in B_{\lambda'}$．从而 $x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$，这说明 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$ 是成立的．

再证(5). 这又分两步.

第一步证明 $A\cap\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A\cap B_\lambda)$. 若 $A\cap\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)\neq\varnothing$。任取 $x\in A\cap\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)$. 由交的定义, $x\in A$ 并且 $x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$. 再根据集合并的定义可知有 $\lambda'\in\Lambda$ 使 $x\in B_{\lambda'}$. 于是 $x\in A\cap B_{\lambda'}$. 从而 $x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A\cap B_\lambda)$. 所以 $A\cap\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A\cap B_\lambda)$.

第二步证明 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A\cap B_\lambda)\subset A\cap\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)$. 由并的定义, 如果 $x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A\cap B_\lambda)$, 则有 $\lambda'\in\Lambda$, 使 $x\in A\cap B_{\lambda'}$. 于是 $x\in A$ 且 $x\in B_{\lambda'}$. 从 $x\in B_{\lambda'}$ 便知 $x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$. 而已知 $x\in A$, 所以 $x\in A\cap\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)$, 这证明了 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A\cap B_\lambda)\subset A\cap\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)$. 由定理 1,

$$A\cap\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A\cap B_\lambda).$$ 证完.

对于两个给定的集合 A, B, 我们定义 $A-B$ 为

$$A-B=\{x;x\in A, x\overline{\in}B\}.$$

即 $A-B$ 是由属于 A 而不属于 B 的那些元素构成的集合. 注意, 一般说来 $(A-B)\cup B$ 未必等于 A(参见习题第 1 题). 如果已知 $A\supset B$, 则 $A-B$ 称为 B 相对于 A 的余集, 记为 $\mathscr{C}_A B$. 特别是如果我们在某一问题中所考虑的一切集合都是某一给定集合 S 的子集时, 集合 B 相对于 S 的余集就简称为 B 的余集, 而把 $\mathscr{C}_S B$ 简记为 $\mathscr{C}B$ 或 B^c.

定理 5

(1) $S^c=\varnothing$, $\varnothing^c=S$.

(2) $A\cup A^c=S$, $A\cap A^c=\varnothing$.

(3) $(A^c)^c=A$.

(4) 若 $A\supset B$,则 $A^c\subset B^c$

定理 6(De Morgan 公式)

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^c=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c,\ \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^c=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c$$

证明 以第一式为例. 如果$\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^c$不是空集,$x\in\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^c$,则 $x\in S$ 且 $x\overline{\in}\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$. 因而对任意 $\lambda\in\Lambda$,都有 $x\overline{\in}A_\lambda$. 所以有 $x\in S-A_\lambda=A_\lambda^c$. 由于这对一切 $\lambda\in\Lambda$ 都成立, 故$x\in\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c$. 这表明$\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^c\subset\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c$.

反之,当$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c\neq\varnothing$且$x\in\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c$时,对一切$\lambda\in\Lambda$,$x\in A_\lambda^c$,即$x\in S$,$x\overline{\in}A_\lambda$. 因而 $x\in S$ 且 $x\overline{\in}\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$, 这也就是说 $x\in\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^c$. 所以$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c\subset\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^c$. 从而由定理 1,

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^c=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c\qquad\text{证完.}$$

对于一个给定的集合 S, 若$\mathscr{F}$是S的一族子集,即$\mathscr{F}$是以S的一些子集为元素的一个集合,如果它满足条件:

1) $\varnothing\in\mathscr{F}$;

2) 当 $A\in\mathscr{F}$ 时，$A^c=\mathscr{C}_S A\in\mathscr{F}$；

3) 当 A,B 都属于$\mathscr{F}$时，$A\cup B\in\mathscr{F}$，

则我们就说$\mathscr{F}$是 S 的一些子集构成的一个**域**或**代数**. 此时必有

(1) $S\in\mathscr{F}$；

(2) 当 $A,B\in\mathscr{F}$时，$A\cap B\in\mathscr{F}$.

如果把上述定义中的 3)改为

3′) 当 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是$\mathscr{F}$中一串元素时，必有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F},$$

则$\mathscr{F}$便称为S的一些子集构成的一个 **σ-域**或 **σ-代数**. 结合2)，3′)和 De Morgan 公式即知对于 σ-域来说，上述(2)可扩充为：

(2′) 当 $A_n\in\mathscr{F}(n=1,2,3,\cdots)$时，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$，$\sigma$-域一定是域.

但是一般说来，只满足条件 1)，2)，3)的域未必满足条件 3′)，即域不一定是 σ-域. 另外条件 3′)中的“一串”A_n 当然是无穷多个，但是并不是说$\mathscr{F}$中任意无穷多个元素的并都仍然是$\mathscr{F}$的元素；因为并非任意一个无穷集合中的元素，都可以排成“一串”，即可以排成一个这样的序列形式. 什么样的无穷集合的元素可以排成一个序列，这正是我们在后面的 §§ 2—4 中要详细讨论的问题.

对于任意给定的非空集合 S. 由S的子集构成的 σ-域显然是有的，比如$\mathscr{F}_0=\{\varnothing,S\}$和由$S$的全体子集所构成的$\mathscr{F}_1$便都是 σ-域. 另外易见$\mathscr{F}_0$和$\mathscr{F}_1$还分别是由S的子集构成的 σ-域中的最小者和最大者，即对任意由S的子集构成的 σ-域$\mathscr{F}$，都有$\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}\subset\mathscr{F}_1$.

定理 7 如果$\mathscr{A}$是由S的子集构成的一非空集合，则唯一存在一个S的子集的 σ-域$\mathscr{F}(\mathscr{A})$，使$\mathscr{A}\subset\mathscr{F}(\mathscr{A})$并且对于$S$的子集

的任何 σ-域$\mathscr{F}$，只要$\mathscr{F}\supset\mathscr{A}$，就有$\mathscr{F}\supset\mathscr{F}(\mathscr{A})$，这也就是说在 S 的子集的、包含$\mathscr{A}$的 σ-域中有一个最小的$\mathscr{F}(\mathscr{A})$．这个 σ-域$\mathscr{F}(\mathscr{A})$称为由$\mathscr{A}$产生的(或决定的) σ-域．

证明 包含$\mathscr{A}$的，由 S 的子集构成的 σ-域总是存在的，比如包含 S 的全体子集的$\mathscr{F}_1$就是一个．用$\mathscr{F}(\mathscr{A})$表示所有包含$\mathscr{A}$的，由 S 的子集所构成的 σ-域的交①，则$\mathscr{F}(\mathscr{A})\supset\mathscr{A}$．如果$\mathscr{F}$是包含$\mathscr{A}$的，由 S 的子集构成的 σ-域，自然有$\mathscr{F}\supset\mathscr{F}(\mathscr{A})$．所以我们只要证明$\mathscr{F}(\mathscr{A})$确实是一 σ-域就可以了．首先，每一(包含$\mathscr{A}$的) σ-域$\mathscr{F}$中都含有空集$\varnothing$，因此$\mathscr{F}(\mathscr{A})$中也含有$\varnothing$．其次，如果 $A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})$，则对于任何含有 A 的 σ-域$\mathscr{F}$，$A\in\mathscr{F}$，从而 $A^c\in\mathscr{F}$，由于这里的$\mathscr{F}$可以是由 S 的子集构成的、包含$\mathscr{A}$的任意 σ-域，所以 $A^c\in\mathscr{F}(\mathscr{A})$．最后若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$中的每一个都属于$\mathscr{F}(\mathscr{A})$，则对于任意包含$\mathscr{A}$的 σ-域$\mathscr{F}$，$A_i\in\mathscr{F}(i=1,2,3,\cdots)$，于是 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$．从而也就有 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}(\mathscr{A})$．可见$\mathscr{F}(\mathscr{A})$确实是一 σ-域．证完．

对于一串给定的集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$．我们定义

$$\{x;\text{有无穷多个 } n, \text{使 } x\in A_n\}$$

为这串集合的**上极限**，记为$\overline{\lim\limits_n} A_n$ 或 $\limsup\limits_n A_n$，定义

$$\{x;\text{只有有限多个 } n, \text{使 } x\in A_n\}$$

为这串集合的**下极限**，记为$\underline{\lim\limits_n} A_n$ 或 $\liminf\limits_n A_n$．显然

$$\liminf_n A_n\subset\limsup_n A_n.$$

① 用 Λ 表示由 S 的子集构成的，包含$\mathscr{A}$ 的 σ-域的全体，则 Λ 非空，约定对于 $\lambda\in\Lambda$，将 λ 视为$\mathscr{F}_1$ 的子集时，记为$\mathscr{F}_\lambda$，则$\mathscr{F}(\mathscr{A})=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{F}_\lambda$．

例 8 设 $A_n=\left[\frac{1}{n},3+(-1)^n\right]$，$n=1,2,3,\cdots$，则

$$\liminf_n A_n=(0,2],\quad \limsup_n A_n=(0,4].$$

这时 $\liminf\limits_n A_n\neq\limsup\limits_n A_n$.

如果一串集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的上、下极限相同，则我们就说这串集合是**有极限的**或**收敛的**，并且我们把 $\limsup\limits_n A_n$（也就是 $\liminf\limits_n A_n$）记为 $\lim\limits_n A_n$，称为其**极限**.

定理 8 对于任意一串集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，都有

$$\liminf_n A_n=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{i=m}^{\infty}A_i,$$

$$\limsup_n A_n=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{i=m}^{\infty}A_i.$$

证明 若 $x\in\liminf\limits_n A_n$，则只有有限个 n，使 $x\notin A_n$，所以有 m_0 使 $n\geqslant m_0$ 时，$x\in A_n$，从而 $x\in\bigcap\limits_{i=m_0}^{\infty}A_i$，于是 $x\in\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{i=m}^{\infty}A_i$. 反之，如果 $x\in\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{i=m}^{\infty}A_i$，则有 m_0 使 $x\in\bigcap\limits_{i=m_0}^{\infty}A_i$，这说明当 $n\geqslant m_0$ 时，$x\in A_n$，可见最多有 m_0-1 个 n 使 $x\notin A_n$. 因而 $x\in\liminf\limits_n A_n$. 这证明了第一个等式.

如果 $x\in\limsup\limits_n A_n$，则有无穷多个 n，使 $x\in A_n$. 因此对于任意 m，在 $A_m,A_{m+1},A_{m+2},\cdots$中一定还有包含 x 的集合，因此 $x\in\bigcup\limits_{i=m}^{\infty}A_i$. 注意 m 任意，所以 $x\in\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=m}^{\infty}A_i$. 反之，如果 $x\in\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=m}^{\infty}A_i$，则对任

意 m, $x\in\bigcup_{i=m}^{\infty}A_i$,所以必有 $i\geqslant m$ 使 $x\in A_i$. 这说明使 $x\in A_n$ 的 n 必有无穷多个,因而 $x\in\limsup_n A_n$. 第二式也得证.

由定理 8 立即可得

定理 9 如果集合序列 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$单调上升(下降),即 $A_n\subset A_{n+1}$(相应地 $A_n\supset A_{n+1}$)对一切 n 都成立,则

$$\lim_n A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n \quad (\text{相应地}, \bigcap_{n=1}^{\infty}A_n).$$

定理 10 如果 $\mathscr{F}$ 是一 σ-域, $A_n\in\mathscr{F}$, $n=1, 2, 3,\cdots$, 则 $\limsup_n A_n$ 和 $\liminf_n A_n$ 也都属于$\mathscr{F}$.

习 题

1. 证明$(B-A)\cup A=B$ 的充要条件是 $A\subset B$.

2. 证明 $A-B=A\cap B^c$.

3. 证明定理 4 中的(3),(4), 定理 6 (De Morgan 公式)中的第二式和定理 9.

4. 证明$(A-B)\cup B=(A\cup B)-B$ 的充要条件是 $B=\varnothing$.

5. 设 $S=\{1,2,3,4\}$, $\mathscr{A}=\{\{1,2\},\{3,4\}\}$, 求 $\mathscr{F}(\mathscr{A})$,又如果 $S=\left\{\frac{1}{n};n=1,2,3,\cdots\right\}$, $\mathscr{A}_0=\left\{\left\{\frac{1}{n};n\text{ 为奇数}\right\}\right\}$, $\mathscr{A}_1=\left\{\{1\},\left\{\frac{1}{3}\right\},\cdots,\left\{\frac{1}{2i+1}\right\},\cdots\right\}$问 $\mathscr{F}(\mathscr{A}_0)$和 $\mathscr{F}(\mathscr{A}_1)$是什么?

6. 对于S 的子集 A,定义 A的示性函数为

$$\varphi_A(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in A,\\ 0, & \text{当 } x\overline{\in} A.\end{cases}$$

证明: 如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是$S$的子集的序列,则

$$\varphi_{\liminf_n A_n}(x)=\liminf_n\varphi_{A_n}(x),$$

$$\varphi_{\limsup_n A_n}(x)=\limsup_n\varphi_{A_n}(x).$$

7. 设 $f(x)$是定义于E上的实函数,a 为一常数,证明

$$E[x;f(x)>a]=\bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[x;f(x)\geqslant a+\frac{1}{n}\right],$$

$$E[x;f(x)\geqslant a]=\bigcap_{n=1}^{\infty} E\left[x;f(x)>a-\frac{1}{n}\right].$$

8. 如果实函数序列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$在$E$上收敛于$f(x)$，则对于任意常数$a$都有

$$E[x;f(x)\leqslant a]=\bigcap_{k=1}^{\infty}\liminf_{n} E\left[x;f_n(x)\leqslant a+\frac{1}{k}\right]$$

$$=\bigcap_{k=1}^{\infty}\liminf_{n} E\left[x;f_n(x)<a+\frac{1}{k}\right].$$

§2 集合的基数

在抽象地研究集合(即不考虑集合中元素的特性)时，一个集合中元素的多少应该是基本的概念. 比如一个由五个苹果作成的集合和一个由五本书作成的集合，当然是两个不同的集合，但是如果我们不计较它们的元素的具体属性时，它们却是有共同的特性的，即它们的元素的多少是相同的(它们都是由五个元素组成的). 相反，一个由五个苹果作成的集合和一个由六个苹果作成的集合之间却没有这种共同点. 可见在抽象地研究集合时，元素的多少是值得重视的属性.

对于有限集合，即由有限多个元素作成的集合来说，表明元素多少的概念自然就是元素的个数. 空集的元素的个数是零. 任意一个非空的有限集的元素的个数都是一个正整数. 为了求得一个有限集合M中元素的个数，我们只要一个个地数它的元素就可以了. 最后数到的那个数是多少，元素的个数就是多少. 一个个地去数M中元素，事实上就是依次用正整数去给M中元素编号，比如说数到了5，那就是从M中挑出了一个元素e，把它叫做第五号，它

可以记作 e_5，这时必定已经先有了 e_1, e_2, e_3, e_4. 因此，如果一个集合 M 含有 n 个元素，那么经过这样的"数"的过程以后，就排成了下述形状：

$$M=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}.$$

现在设想 M' 是另外一个也是由 n 个元素组成的集合，那么对它的元素数过以后自然也就排成了

$$M'=\{e'_1, e'_2, \cdots, e'_n\}.$$

由于 M 和 M' 中元素的个数相同，两处的 n 是同一个正整数. 如果我们让 M' 中编号为 i 的元素 e'_i 和 M 中具有同一编号的元素 e_i 相对应，则这个对应是一对一的. 反之，如果 M'' 是另一个集合，元素的个数并不知道. 但是有一种办法使它的元素 e'' 和 M 的元素 e 一个一个地对应起来，则 M'' 的元素的个数必定也正好是 n. 就好象我们如果已知有 100 个人，另外还有一堆书，不知有多少，但是当每人拿一本时，正好拿完，既没有人拿两本，也没有人没有拿，那么书的本数就一定是 100，用不着再一本本地去数. 如果人数事先也是未知的，那么我们当然还是不知道书有多少本，但是我们可以肯定人和书的数目必定是相同的. 即这个"人的集合"和这个"书的集合"的元素个数相同.

以上的分析表明：要说明两个有限集合 M 和 M' 具有同样多的元素，我们并不需要知道它们元素的个数是多少，而只要能在它们的元素之间建立起一个一一对应的关系来就可以了. 这个事实启示我们如何去研究无穷集合中元素的数量，即如何鉴别两个无穷集合的元素的数量是否有差别. 要注意，对于无穷集合来说，元素的"个数"这个概念已是完全没有意义的了.

定义 设 A, B 是两个集合，如果存在二者元素之间的一个对应关系 φ，使 A 中任意元素 x，通过 φ 都恰与 B 中一个元素 y 对应，而 B 中任意的 y 也一定是 A 中某一 x（通过 φ）在 B 中的对应

元素，则我们就说A和B是对等的或具有相同的基数的，记为$A \sim B$. 而满足上述条件的对应φ称之为A和B之间的一个1—1对应.（注意$A \sim B$和$A = B$不同.）

显然，两个集合"具有相同的基数"是有限集合的"具有相同的元素个数"这一概念的推广(因为对于有限集合来说，A和B在且只在它们的元素个数相同时才能对等.). 因此"基数"就应该是"元素个数"这一概念的推广. 还是到底什么是集合的基数，我们不打算给出一个明确的回答，而且也很难给出一个明确的回答，因为这是一个很复杂的问题. 我们只能认为基数是任何集合都具有的一个属性，任意两个集合，如果它们是对等的，则它们的基数就相同. 反之，如果两个集合的基数相同，则它们必定是对等的，即必定可以作出它们之间的1—1对应关系来. 集合A的基数记为$\overline{\overline{A}}$，A和B的基数相同便可记为$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$. 显然基数的相等是具有对称性和传递性的. 即如果$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$则$\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}$；如果$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{C}}$，则$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$（集合的基数也称为集合的**势**或**权**.）

例 1 设B是全体正整数所作成的集合，A是全体偶数所作成的集合，则$A \sim B$. 因为只要令B中的n与A中的$2n$对应，即可建立一个B和A之间的1—1对应.

例 2 设A是$(0,1)$开区间中所有的点所作成的集合，B是半轴$(0,\infty)$上所有的点所作成的集合，则$A \sim B$.

事实上，如果用C表示图1所画圆弧(不带端点)上所有的点所作成的集合. 通过将圆弧往OX轴上作垂直投影，可以将A中的点x与C中的点z一一对应起来，但是另一方面，通过从P点的中心投影，我们又可以将C中的点

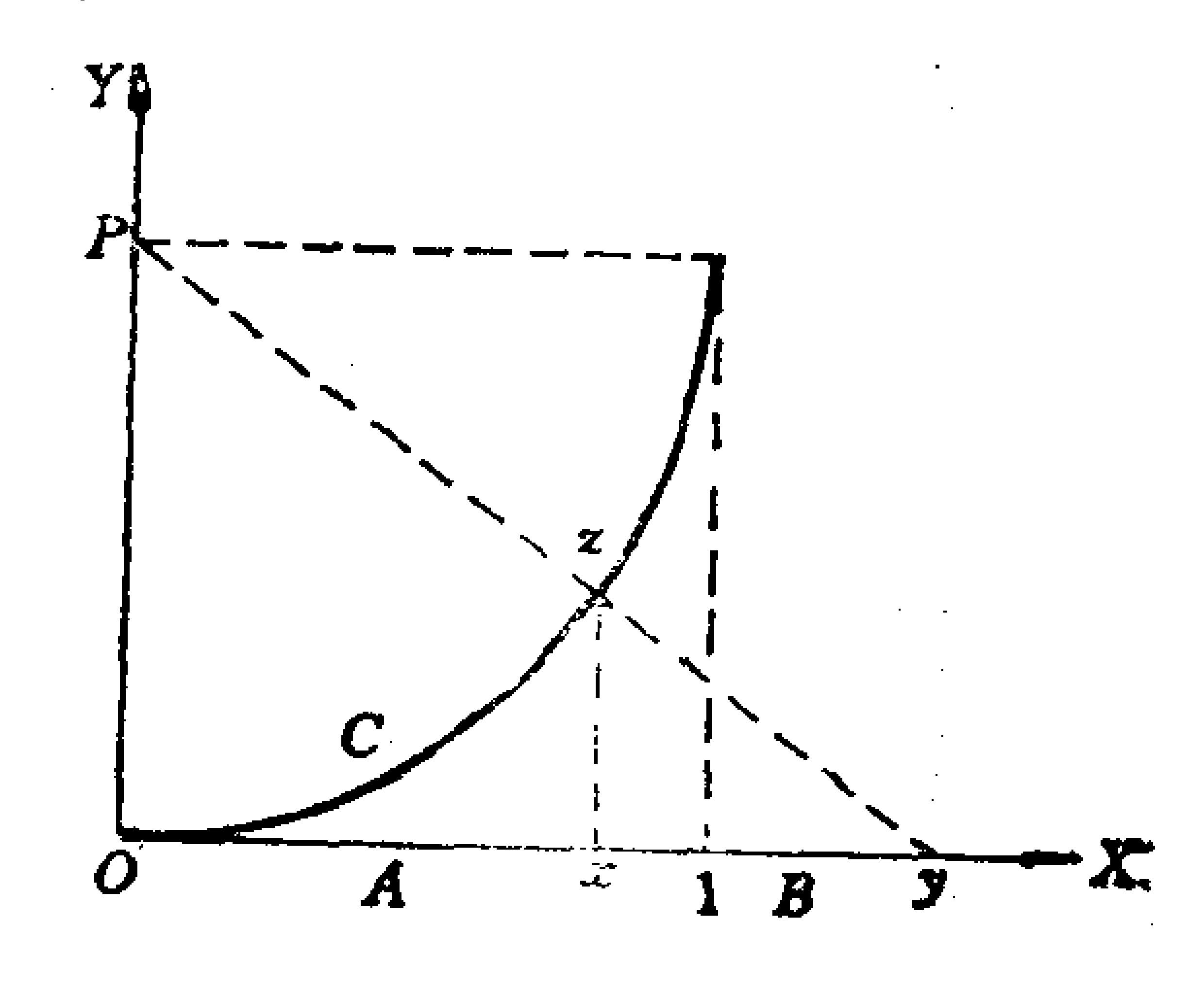


图 1

x 和 B 中的点 y 一一对应起来，于是 A 中的点 x 也就和 B 中的点 y 一一对应起来了.

上述两个例子中的 A 都是 B 的真子集. 所以这两个例子都是整个集合和它的一个真子集对等的例子. 其所以可能是因为这两个例子中的 B 都是无穷集合. 对于有限集合来说是绝不会出现这种状况的. 我们还可以证明(见§3 习题5)任意无穷集合一定可以和它自己的某一个真子集对等. 所以，能和它的一个真子集对等是集合为无穷集合的特征性质. 其实这是可以用来作为无穷集合的定义的. 在前面，我们是把无穷集合理解为"不是有限集合的集合"而没给它下正式的定义. 如果我们把无穷集合就定义为**能与它本身的一个真子集对等的集合**，任何无穷集合都能和它的一个真子集对等就不再成为需要证明的事情了.

大家也许会想：可能任意两个无穷集合都是对等的吧！假如真是如此，那么"对等"这个概念或者说基数概念的引进也就没什么大意思了. 为了说明情况不是如此，我们先来证明下述定理(Cantor 定理).

定理 1 [0, 1]闭区间上所有的点作成的点集是不能和由全体正整数所作成的集合N对等的.

证明 设不然，则存在一个N和[0,1]之间的 1—1 对应关系 φ. 我们把[0, 1]区间上的与N中的 n 对应的元素 $\varphi(n)$ 记为 x_n，则我们就将[0,1]上全体的点排列成了一个序列：

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots. \qquad (*)$$

把[0,1]三等分，则显然 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ 与 $\left[\frac{2}{3},1\right]$ 中至少有一个不含有 x_1，用 I_1 表示任一这样的区间，则 $x_1 \overline{\in} I_1$. 把 I_1 三等分，在它们的左与右两个闭区间中必至少有一个不含 x_2，用 I_2 表示一个这样的区间，则 $x_2 \overline{\in} I_2$. 同样把 I_2 三等分，又可得不含有 x_3 的一个闭区间

I_3,依此类推,根据归纳法,得到闭区间序列$\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$,满足条件:

(i) $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$,

(ii) $x_n \overline{\in} I_n, n=1,2,3,\cdots$,

(iii) I_n 的长度为$\frac{1}{3^n}$,所以当 $n \to \infty$时趋于 0.

根据闭区间套定理,存在点 $\xi \in I_n, n=1,2,3,\cdots$ 由于 $x_n \overline{\in} I_n$ 对一切 n 成立,故 ξ 不可能是某一 x_n. 但 ξ 显然属于[0,1],这与(*)是由[0,1]上全体的点排成相矛盾.

定义 设 A,B 是两个集合. 如果 A 和 B 不对等,但存在 B 的某子集 B^* 使 A 和 B^* 对等,则我们就说 A 的基数$\overline{\overline{A}}$小于 B 的基数$\overline{\overline{B}}$,记为$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$.

A 的基数小于 B 的基数也可以说成 B 的基数大于 A 的基数,记为$\overline{\overline{B}} > \overline{\overline{A}}$.

上述$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$的定义中,特别写明了"$A$ 和 B 不对等"这样一个条件,它的必要性是显然的. 因为如果 A 是一无穷集合,则 A 是可以和它自己的一个真子集相对等的,因此如果定义$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$时,只要求 A 能和 B 的一个真子集对等而不加 A 和 B 不对等的限制,就会得出$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{A}}$的结论来,这显然是不合适的. 但是现在这样的定义是否就合理了呢? 按现在这样的定义,会不会出现既有$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$又同时有$\overline{\overline{B}} < \overline{\overline{A}}$的情况呢? 下面的 Bernstein 定理说明这是不会的.

定理 2 若 A,B 是两个集合. 如果存在 A 的子集 A^*, B 的子集 B^*,使 $A \sim B^*, B \sim A^*$,则 $A \sim B$.

证明 设 φ 是 A 和 B^*之间,ψ 是 B 和 A^*之间的一个 1—1 对应关系. 令 $A_0 = A^*, B_0 = B^*, A_1 = A - A_0$. 然后定义

$$B_1 = \varphi(A_1) \triangleq \{y; y = \varphi(x), x \in A_1\},$$

$$A_2 = \psi(B_1) \triangleq \{x; x = \psi(y), y \in B_1\},$$

("$\triangleq$"表示式右是式左的记号的定义)由于 $A_2 \subset A_0$,所以 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. 再令 $B_2 = \varphi(A_2)$,注意 φ 是 1—1对应,便知 $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. 一

般说来，如已作出 $A_1,\cdots,A_n$ 互不相交，$B_1,\cdots,B_n$ 互不相交，$A_{i+1}=\psi(B_i)$，$B_i=\varphi(A_i)$，$i=1,2,\cdots,n-1$，则取

$$A_{n+1}=\psi(B_n),\quad B_{n+1}=\varphi(A_{n+1})$$

由于 ψ 是 1—1 对应，从 $B_1,\cdots,B_n$ 互不相交可知 A_{n+1} 和 $A_2,\cdots,A_n$ 互不相交. 又 $A_{n+1}\subset A_0$，故 A_{n+1} 和 A_1 也不相交. 再由于 φ 是 1—1 对应，$A_1,\cdots,A_{n+1}$ 互不相交便知 B_{n+1} 与 $B_1,\cdots,B_n$ 互不相交. 这样我们就得出了两串互不相交的集合 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使 $A_{i+1}=\psi(B_i),B_i=\varphi(A_i),i=1,2,3,\cdots$. 于是 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\overset{\varphi}{\sim}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$.

又通过 ψ，$B\sim A_0$，$B_k\sim A_{k+1}$，故

$$B-\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\overset{\psi}{\sim}A_0-\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{k+1}=A_0-\bigcup_{n=2}^{\infty}A_n.$$

但是从 $A_1=A-A_0$ 及 $A_0\subsetneq A$ 知 $A_0=A-A_1$，所以 $A_0-\bigcup\limits_{n=2}^{\infty}A_n=A-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，于是

$$A=(A-\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\left(A_0-\bigcup_{n=2}^{\infty}A_n\right)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)$$

$$\sim\left(B-\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=B.$$

Bernstein 定理不仅保证了 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$ 和 $\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$ 不可能同时成立. 而且也是在证明两个集合对等时常要用到的有力工具.

推论 1 若 $A\subset B\subset C$，$A\sim C$，则 $A\sim B$，$B\sim C$.

证明 以 $A\sim B$ 的证明为例. 设 φ 是 A 和 C 之间的一个 1—1 对应. 令 $A^*=\{x;x\in A,\varphi(x)\in B\}$，则 $A^*\subset A$，$A^*\sim B$. 取 $B^*=A$，则自然有 $A\sim B^*$. 于是由 Bernstein 定理 $A\sim B$.

关于基数大小的比较，还有一个重要的问题没有解决. 那就是是否对于任意两个集合 A 和 B，$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$ 三者之中必有一个成立呢？回答是肯定的，但证明比较复杂，我们不拟讨论，有兴趣的读者可以看阅参考书①.

习 题

1. 用解析式给出$(-1,1)$和$(-\infty,\infty)$之间的一个 1—1 对应.

2. 证明只要 $a<b$，就有$(a,b)\sim(0,1)$.

3. 证明平面上的任何不带圆周的圆上的点所作成的点集都是和整个平面上的点所作成的点集对等的，进而证明平面上的任何非空的开集(开集的定义见数学分析或本书第二章 § 2）中的点所作成的点集和整个平面上的点所作成的点集对等.

§ 3 可数集合

定义 凡能与全体自然数所作成的集合N对等的集合都称为**可数集合**.

因为N中的元素是可以按大小排列成一个无穷序列

$$1,2,3,\cdots,n,\cdots$$

的. 因此任何可数集合M中的元素也一定可以将之排成无穷序列的形式:

$$e_1,e_2,e_3,\cdots,e_n,\cdots$$

反之，任意一个集合M，如果可以将它的全体元素排成上述的序列形式，则M一定是可数的. 因为我们只要令序列中的第 n 个元素和自然数 n 对应起来，就得到了M和N之间的一个 1—1 对应. 所以一个集合是可数集合的充要条件是它的元素可以被排列成一个

①那汤松(И. П. Натансон)，徐瑞云译，实变函数论，高等教育出版社，1958 年中译本，第十四章或其他有关集合论的专书(如科学出版社 1960 年版的，F. 豪斯道夫的《集论》第二至四章).

无穷序列. 这也就是可数集合也常称为可列集合的原因.

定理 1 任何无穷集合 M 都包含一个可数子集.

证明 从 M 中任取一个元素称之为 e_1. 因 M 是无穷集合, $M \neq \{e_1\}$. 因此又可以在 M 中取一元素 $e_2 \neq e_1$. 一般说来, 如已从 M 中取出互不相同的元素

$$e_1, e_2, \cdots, e_n.$$

则从 M 为无穷集合知 $M-\{e_1, e_2, \cdots, e_n\} \neq \varnothing$. 因而可以在 $M-\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 中取一元素 e_{n+1}, 它自然是不同于 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 中的任何一个的. 这样, 根据归纳法, 我们得到一个由 M 中互不相同的元素组成的无穷序列:

$$e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots,$$

显然 $M^* = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$ 是 M 的一个可数子集.

定理 1 说明可数集合的基数是无穷集合的基数中的最小者.

定理 2 可数集合的子集如果不是有限集合则一定还是可数集合.

证明 设 M^* 是可数集合 M 的子集. 如果 M^* 不是有限集合, 则由定理 1, M^* 有可数子集 M^{**}. 于是 $M^{**} \subset M^* \subset M$, $M^{**} \sim M$. 从而由 Bernstein 定理后的推论 1, $M^* \sim M$, 即 M^* 也是可数集合.

定理 3 若 A 可数, B 有限, 则 $A \cup B$ 可数.

证明 若 $B \subset A$, 则 $A \cup B = A$ 当然是可数的. 若 B 不全包含于 A 内, 令 $B^* = B - A$, 则 B^* 是一非空的有限集合. 设其元素为 $b_1, b_2, \cdots, b_m$. 既然 A 是可数的, 可以将其元素排成无穷序列的形式, 即

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}.$$

于是 $A \cup B = A \cup B^*$ 的元素便可排成

$$b_1, b_2, \cdots, b_m, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

这样一个无穷序列的形式. 所以 $A \cup B$ 可数.

定理 4 若 A, B 都是可数集合，则 $A\cup B$ 是可数的.

证明 令 $B^*=B-A$. 由定理 2，B^* 或为有限集合或为可数集合，如果 B^* 是有限集合，定理 3 说明 $A\cup B=A\cup B^*$ 是可数的. 如果 B^* 是可数集合，则可将其排列成无穷序列形式：

$$B^*=\{b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}.$$

同样 A 也可以排为

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}.$$

于是 $A\cup B=A\cup B^*$ 便可排成：

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n, \cdots$$

这样一个无穷序列，所以是可数的.

推论 1 若 $A_1, \cdots, A_n$ 的每一个都是有限集合或可数集合，则 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 是有限集合或可数集合，而只要其中有一个 A_i 不是有限的，则 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 就是可数的.

定理 5 如果 $A_i\,(i=1,2,3,\cdots)$ 的每一个都是可数集合，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 也是可数集合.

证明 令 $A_1^*=A_1$，$A_i^*=A_i-\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right)(i\geqslant 2)$，则 A_1^* 可数，$A_i^*(i\geqslant 2)$ 都是有限或可数的. 因此 A_1^* 可排成无穷序列形式

$$A_1^*=\{a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, \cdots\}.$$

各 $A_i^*(i\geqslant 2)$ 则可排成有限序列或可数序列形式：

$$A_i^*=\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in_i}\}\text{ 或 }\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}, \cdots\}.$$

于是 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^*$ 中的元素都可用 i, j 两个正整数编上号：

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{a_{ij}; j=1,2,\cdots,n_i \text{ 或 } j=1,2,3,\cdots; i=1,2,3,\cdots\}.$$

令 a_{ij} 对应正整数 2^i3^j，当 i, j 和 i', j' 不完全相同时 $2^i3^j \neq 2^{i'}3^{j'}$（正整数的分解定理），所以 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 和全体正整数构成的集合 N 的一子集对等. 而 $A_1 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$，所以 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 是可数的.

定理 6 全体有理数构成一个可数集合.

证明 设 $A_i = \left\{\frac{n}{i}; n=1,2,3,\cdots\right\}$, $i=1,2,3,\cdots$，则 A_i 都是可数集合，所以全体正有理数构成的集合 $Q_0^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 是可数的，从而全体负有理数构成的集合 Q_0^- 也是可数的. 于是全体有理数构成的集合 $Q_0 = Q_0^+ \cup \{0\} \cup Q_0^-$ 也可数.

应该注意，有理数是在数轴上处处密集的，即数轴上的任何小区间中都是有（而且有无穷多个）有理数的. 可是 Q_0 仍然是一可数集合，能和全体正整数所作成的那样稀疏的集合N对等. 这个表面看来令人难以置信的事实说明我们在判断一个集合是否可数时应该特别小心.

定理 7 如果 A 是一无穷集合，B 是一可数集合，则 $A \cup B \sim A$.

证明 由定理 1，A 含有可数子集 A^*. 令 $C = A - A^*$，则 $A = C \cup A^*$, $A^* \cap C = \varnothing$，又

$$A \cup B = A \cup (B-A) = C \cup A^* \cup (B-A),$$

$$C\cap(A^*\cup(B-A))=\varnothing.$$

注意 $A^*\sim A^*\cup(B-A)$.(定理 3 或定理 4)，令 C 中 i 点与自己对应，从上面 A 与 $A\cup B$ 的分解式，便有 $A\sim A\cup B$.

习　题

1. 证明平面上坐标为有理数的点构成一可数集合.

2. 以数直线上的互不相交的开区间为元素的任意集合至多含有可数多个元素.

3. 所有系数为有理数的多项式组成一可数集合.

4. 如果 $f(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上的单调函数，则 $f(x)$ 的不连续点最多有可数多个.

5. 设 A 是一无穷集合. 证明必有 $A^*\subset A$，使 $A^*\sim A$ 且 $A-A^*$ 可数.

6. 若 A 为一可数集合，则 A 的所有有限子集构成的集合也是可数集合.

7. 若 A 是由非蜕化的（即左右端点不相等的）开区间组成的不可数无穷集合，则有 $\delta>0$ 使 A 中有无穷多个区间的长度大于 δ.

8. 如果空间中的长方体

$$I=\{(x,y,z);a_1<x<a_2,b_1<y<b_2,c_1<z<c_2\}$$

中的 a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 $(a_1<a_2,b_1<b_2,c_1<c_2)$ 都是有理数，则称 I 为**有理长方体**. 证明全体有理长方体构成一可数集合.

§4　不可数无穷集

在 §2 中我们已证明 $[0,1]$ 闭区间上的点所构成的集合是不能和全体正整数所作成的集合N对等的(§2定理1)，这就是说 $[0,1]$ 是一不可数的无穷集合. 由于对等关系具有传递性，任何能与 $[0,1]$ 对等的集合也一定是不可数无穷集.

通常我们用 a 或 $\aleph_0$ 表示可数集合的基数，称为**可数基数**，而用 c 或 $\aleph$ 表示 $[0,1]$（以及能与 $[0,1]$ 对等的集合）的基数，称为**连续基数**. 综合 §2 定理 1 和 §3 定理 1 便知 $c>a$.

如果我们令$[0,1]$中的$0,1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$分别和$(0,1)$中的$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n+2},\cdots$对应，而将$[0,1]$中其余的$x$和$(0,1)$中的同一$x$对应，则得到$[0,1]$和$(0,1)$之间的一个1—1对应. 因此$(0,1)$的基数同样也是$c$.

定理 1 全体实数所作成的集合$\mathbf{R}^1$的基数是c.

证明 因为

$$y=\operatorname{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$$

是$(0,1)$上的x和$\mathbf{R}^1$上的y之间的一个1—1对应.

定理 2 只要$a<b$，开区间(a,b)的基数都是c.

证明 因为

$$y=\frac{x-a}{b-a}$$

是(a,b)和$(0,1)$之间的一个1—1对应.

推论 若$a<b$，则(a,b)，$[a,b]$，$[a,b)$，$(a,b]$都是具有连续基数c的. 同样(a,∞)，$[a,\infty)$的基数也都是c.

定理 3 如果$A_i(i=1,2,3,\cdots)$都是基数小于或等于c的集合，且其中至少有一个的基数等于c，则$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$的基数是$c$.

证明 不妨设$\overline{\overline{A_1}}=c$. 令

$$A_1^*=A_1,\ A_i^*=A_i-\bigcup_{j=1}^{i-1}A_j\quad(i\geqslant 2),$$

则$A_i^*\cap A_j^*=\varnothing\ (i\neq j)$且$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i^*=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$. 由于$\overline{\overline{A_i}}\leqslant c$，所以$\overline{\overline{A_i^*}}\leqslant c$. 注意$[i-1,i)$的基数是$c$，所以应有$B_i^*\subset[i-1,i)$使$A_i^*\sim$

B_i^*. 设 φ_i 是 A_i^* 和 B_i^* 之间的一个 1—1 对应关系. 定义

$$\varphi(x)=\varphi_i(x) \quad 当\ x\in A_i^*, i=1,2,3,\cdots.$$

易见 φ 便是 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^*$ 和 $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^*$ 之间的一个 1—1 对应关系. 因而 $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \sim B^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^* \subset [0,\infty)$. 另一方面 $[0,\infty)\sim A_1\subset A$, 由 Bernstein 定理便知 $A\sim[0, \infty)$. 即 $\overline{\overline{A}}=c$. 证完.

定理 4 平面上单位正方形: $0<x<1, 0<y<1$ 上的点所构成的点集 S 的基数是 c.

证明 对于任意 $(x,y)\in S$, 我们将 x, y 表成无穷小数

$$x=0.a_1a_2\cdots, \quad y=0.b_1b_2\cdots.$$

并限定在上述表达中不准出现从某一位以后各位数字全是零的形式, 则这种表示法是唯一的. 令

$$z=0.a_1b_1a_2b_2\cdots,$$

则显然 z 是 $(0,1)$ 上的一个点, 并且上述表达式中也不会出现从某一位以后各位数字全是零的情况. 我们令 (x,y) 和这个 z 对应. 如果 (x',y') 是 S 中不同于 (x,y) 的点,

$$x'=0.a_1'a_2'\cdots, \quad y'=0.b_1'b_2'\cdots,$$

则必有某一 i, 使 $a_i'\neq a_i$ 或 $b_i'\neq b_i$. 于是

$$z'=0.a_1'b_1'a_2'b_2'\cdots$$

就不可能各位小数都和 $z=0.a_1b_1a_2b_2\cdots$ 的相应位小数相同从而 $z'\neq z$. 这表明上述对应是 S 到 $(0,1)$ 的某一子集 Z 上的 1—1 对应. 另一方面 S 的子集 $S^*=\left\{(x,y); 0<x<1, y=\frac{1}{2}\right\}\sim(0,1)$. 所以由 Bernstein 定理便知 $S\sim(0,1)$. 证完.

从定理 4 便可立即推出整个平面上的点所构成的点集的基数也是 c. 其实仿照上述证明还可证明任意 n-维空间 $\mathbf{R}^n$ 中全部的

点所构成的点集的基数都是 c. 但切不可认为不可数无穷集合的基数都不会超过 c. 下面的定理 5 告诉我们，不可能存在一个最大的基数.

定理 5 设 M 是任意的一个集合，如果用 $\mathscr{M}$ 表示 M 的全体子集构成的集合，则 $\overline{\overline{\mathscr{M}}}>\overline{\overline{M}}$.

证明 M 能和 $\mathscr{M}$ 的一个子集 $\mathscr{M}^*$ 对等是显然的. 这只要令 $\mathscr{M}^*=\{\{x\};\ x\in M\}$ 就可以了. 所以我们要证明的是 $\mathscr{M}$ 不可能和 M 对等. 用反证法. 假设 $M\sim\mathscr{M}$. 则对于每一 $\alpha\in M$, 都应有 $\mathscr{M}$ 的一元素，亦即 M 的一子集 M_α 与之对应. 我们令

$$M^*=\{\alpha;\alpha\in M,\alpha\overline{\in}M_\alpha\}.$$

M^* 是 M 的子集，应属于 $\mathscr{M}$. 从而应有 $\alpha^*\in M$ 使 $M^*=M_{\alpha^*}$. 现在考虑 α^* 与 M^* 的关系. 如果 $\alpha^*\in M^*$，则由 M^* 的定义 $\alpha^*\overline{\in}M_{\alpha^*}=M^*$，矛盾. 但如果说 $\alpha^*\overline{\in}M^*$，则由 $M^*=M_{\alpha^*}$ 又应有 $\alpha^*\in M^*$，同样产生矛盾. 可见 $M\sim\mathscr{M}$ 是不可能的. 证完.

如果 M 是一个包含 n 个元素的有限集合，则通过简单的计算即知 $\mathscr{M}$ 是一个包含 2^n 个元素的集合，即 $\overline{\overline{\mathscr{M}}}=2^n=2^{\overline{\overline{M}}}$. 推广这个事实，我们对 M 为无穷集合时，也可将 $\mathscr{M}$ 的基数记为 $2^{\overline{\overline{M}}}$. 于是定理 5 是说：$2^{\overline{\overline{M}}}>\overline{\overline{M}}$.

习 题

1. 证明[0,1]上的全体无理数构成一不可数无穷集合.

2. 证明全体代数数(即整系数多项式的零点)构成一可数集合，进而证明必存在超越数.

3. 证明如果 a 是可数基数，则 $2^a=c$. (提示：一方面对于正整数集N的任意子集 A，考虑 A 的示性函数 $\varphi_A(n)$: $\begin{cases}\varphi_A(n)=1, 当\ n\in A;\\ \varphi_A(n)=0, 当\ n\overline{\in}A.\end{cases}$

及 $x=0.\varphi_A(1)\varphi_A(2)\cdots\in(0,1)$. 另一方面，对于任意 $x\in(0,1)$，考虑(0, 1)中的有理数集 R_0 的子集 $A_x=\{r:r\leqslant x,\ r\in R_0\}$. 再用 Bernstein 定理.)

4. 证明如果$\overline{\overline{A\cup B}}=c$，则$\overline{\overline{A}}$，$\overline{\overline{B}}$ 中至少一个为c.

5. 设F是$[0,1]$上全体实函数所构成的集合，证明$\overline{\overline{F}}=2^c$ （提示：考虑$A\subset[0,1]$的示性函数及F中元素的图象，应用 Bernstein 定理.）

第二章　n 维空间中的点集

因为我们要研究 n 个自变量的实变函数，所以有必要对 n 维空间中的点集理论有所介绍.

所谓 n 维空间 $\mathbf{R}^n$，我们指的是由 n 个实数组成的有序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体所作成的集合. $\mathbf{R}^n$ 中的元素称为 $\mathbf{R}^n$ 中的点. 对于 $\mathbf{R}^n$ 中任意两点

$$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n),\quad Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

之间的距离 $\rho(X, Y)$ 定义为

$$\rho(X, Y)=\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right\}^{1/2}.$$

显然对于 $\mathbf{R}^n$ 中任意的点 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，$Z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)$，恒有

(i) $\rho(X, Y)\geqslant 0$ 并且 $\rho(X, Y)$ 在且只在 $X=Y$，即 $x_i=y_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 时为零；

(ii) $\rho(X, Y)=\rho(Y, X)$；

(iii) $\rho(X, Y)\leqslant\rho(X, Z)+\rho(Z, Y)$　(三角不等式).

从三角不等式立即可以推知 $\rho(X, Y)$ 是 (X, Y) 的"二元"连续函数，即当 $\rho(X_n, X)\to 0$，$\rho(Y_n, Y)\to 0$ 时 $\rho(X_n, Y_n)\to\rho(X, Y)$.

对于 $\mathbf{R}^n$ 中的定点 X_0 及常数 $\delta>0$，称 $\mathbf{R}^n$ 中到 X_0 点的距离小于 δ 的点的全体所作成的集合为以 X_0 为心，以 δ 为半径的**邻域**，记为 $N(X_0, \delta)$. 当没有必要指明 X_0 和 δ 时，就简称之为一邻域.

对于 $\mathbf{R}^n$ 中的点集 M，如有常数 K，使对于任意 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in M$，都有 $|x_i|\leqslant K\ (i=1, 2, \cdots, n)$，则称 M 为**有界的**.

显然 M 有界的充要条件是有常数 K'，使对一切 $X\in M$ 都有 $\rho(X,O)\leqslant K'$，此处 $O=(0,0,\cdots,0)$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 中的**原点**.

对于 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，今后用 $\|X\|$ 表示 $\rho(X,0)$，即

$$\|X\|=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}$$

称为 X 的**模**或**长度**.

§1 聚点、内点、边界点、Bolzano-Weierstrass定理

设 $E\subset\mathbb{R}^n$，$P_0\in\mathbb{R}^n$. 我们来研究 P_0 与 E 的关系. 现在有三种可能:

第一，在 P_0 附近根本没有 E 的点，即有邻域 $N(P_0,\delta)$ 使 $N(P_0,\delta)\cap E=\varnothing$；

第二，P_0 附近全是 E 的点，即有邻域 $N(P_0,\delta)\subset E$；

第三，P_0 附近既有属于 E 的点也有不属于 E 的点，即在任意以 P_0 为心的邻域 $N(P_0,\delta)$ 中，既有 $P\in E$ 也有 $P'\overline{\in}E$，此时我们称 P_0 为 E 的**边界点**.

定义 1 设 $E\subset\mathbb{R}^n$，$P_0\in\mathbb{R}^n$. 如果存在 $\delta>0$ 使以 P_0 为心，以 δ 为半径的邻域 $N(P_0,\delta)\subset E$，则我们就称 P_0 为 E 的**内点**.

定义 2 设 $E\subset\mathbb{R}^n$，$P_0\in\mathbb{R}^n$，如果对任意 $\delta>0$，在以 P_0 为心，以 δ 为半径的邻域 $N(P_0,\delta)$ 中恒有无穷多个点属于 E，则我们就称 P_0 是 E 的**聚点**.

显然 E 的内点必为 E 的聚点，但 E 的聚点可以不是 E 的内点，因为还可能是边界点. 其次 E 的内点一定属于 E 而 E 的聚点则既可能属于 E 也可能不属于 E.

定义 3 对于 $E\subset\mathbb{R}^n$，称 E 的全体聚点所作成的点集为 E 的**导集**，记为 E'. 又 $E\cup E'$ 称为 E 的**闭包**，记为 $\bar{E}$.

定理 1 $P_0 \in E'$ 的充要条件是 P_0 为 E 之一极限点，即有一串互异的点 $P_n \in E$ 使 $\rho(P_n, P_0) \to 0$ $(n \to \infty)$.

证明 充分性显然. 事实上，对于任意 $N(P_0, \delta)$，因为 $\delta > 0$，故只要 m 充分大，当 $n \geqslant m$ 时便有 $\rho(P_n, P_0) < \delta$，从而 $P_n \in N)P_0, \delta)$，这样的 P_n 当然还是有无穷多的.

现证必要性. 令 $\delta_n = \frac{1}{n}$，则 $\delta_n > 0$. 故在 $N(P_0, \delta_n)$ 中应有无穷多个点 $P \in E$(因 $P_0 \in E'$). 任选其一作为 P_1. 一般说来，如已作出互异的 $P_1, \cdots, P_n, P_i \in E \cap N(P_0, \delta_i)$，$i = 1, 2, \cdots, n$，则因 $E \cap N(P_0, \delta_{n+1})$ 是无穷集合，故

$$E \cap N(P_0, \delta_{n+1}) - \{P_1, \cdots, P_n\} \neq \varnothing.$$

从而可取 $P_{n+1} \in E \cap N(P_0, \delta_{n+1}) - \{P_1, \cdots, P_n\}$，显然它和 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 中任何一个都不相同. 总之，我们得到了一串互异的点 $\{P_n\}, P_i \in E, P_i \in N(P_0, \delta_i), i = 1, 2, 3, \cdots$. 注意 $\delta_i = \frac{1}{i} \to 0$ $(i \to \infty)$，故 $\rho(P_n, P_0) \to 0$. 证完.

定理 2 若 $A \subset B \subset \mathbf{R}^n$，则 $A' \subset B'$.

证明 这是显然的事实.

定理 3 若 $A \subset \mathbf{R}^n, B \subset \mathbf{R}^n$，则 $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

证明 因 $A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$，所以从定理 2，$A' \subset (A \cup B)'$，$B' \subset (A \cup B)'$，从而 $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$. 另一方面，设 $P \in (A \cup B)'$，则由定理 1 有一串互异的点 $P_n \in A \cup B$，使 $\rho(P_n, P) \to 0$. 若 $P \in A'$，则 $P \in A' \cup B'$；若 $P \overline{\in} A'$，则 P_n 中至多有有限多个属于 A，其余无穷多个都是属于 B 的. 于是再根据定理 1 知 $P \in B' \subset A' \cup B'$. 这证明 $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$. 证完.

定理 4 (Bolzano-Weierstrass 定理) 若 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中一有界的无穷集合，则 E 至少有一个聚点 P (P 可以不属于 E). 即 E'

$\neq\varnothing$.

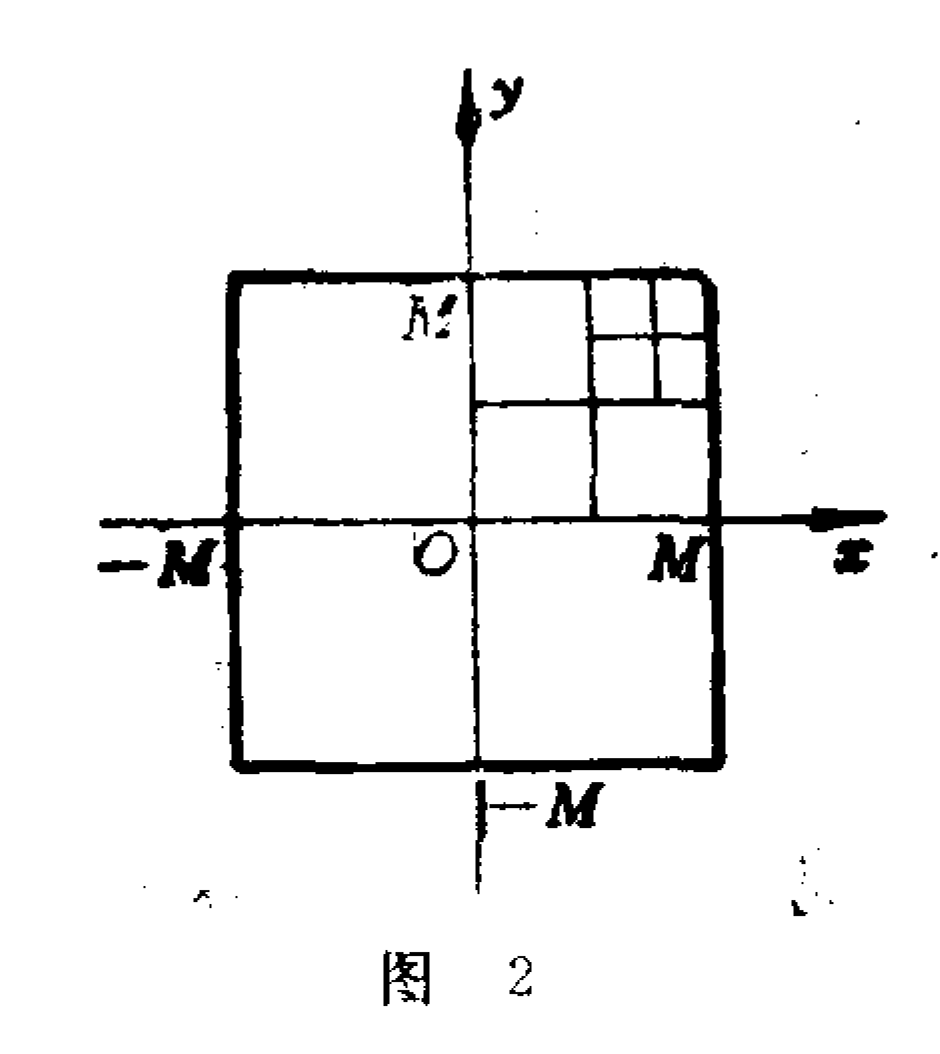


图 2

证明 为简便计，我们只就 $n=2$ 的情形进行证明. 因为 E 有界，故应有常数 M，使 E 包含在正方形 $R_0=\{(x,y);\ |x|\leqslant M,|y|\leqslant M\}$ 中(图 2). 现用坐标轴将 R_0 分为四个小正方形，则其中至少有一个小闭正方形中有无穷多个属于 E 的点. 现令这个小正方形为 R_1，则 R_1 的边长为 M. 一般说来，设已作出了 n 个边平行于坐标轴的逐个包含的闭正方形

$$R_0\supset R_1\supset\cdots\supset R_n,\quad R_n\cap E \text{ 为无穷集合,}$$

$$R_k \text{ 的边长为 } 2^{-k+1}M,\quad k=0,1,2,\cdots,n,$$

则将 R_n 用平行于坐标轴的直线等分为四个小闭正方形后，这四个小闭正方形中必至少有一个中有无穷多个属于 E 的点，取一个这样的闭正方形记为 R_{n+1}. R_{n+1} 的边长显然是 $2^{-n}M$. 于是我们得到了一串紧缩的闭正方形 R_n，

$$R_0\supset R_1\supset R_2\supset\cdots\supset R_n\supset\cdots,$$

$$R_n\cap E \text{ 是无穷集,}\quad n=0,1,2,3,\cdots.$$

$$R_n \text{ 的边长为 } 2^{-n+1}M\to 0\quad(\text{当 } n\to\infty)$$

由 Cantor 的紧缩闭矩形套定理，应有唯一的一点 $P\in\bigcap_{n=0}^{\infty}R_n$. 以下我们来证明 P 就是 E 的一个聚点.

设 $N(P,\ \delta)$ 是以 P 为心的任意一个邻域. 因 $2^{-n}M\to 0$ (当 $n\to\infty$)，故只要 n_0 充分大便有 $2^{-n_0}M<\delta/\sqrt{2}$. 于是 R_{n_0+1} 的对角线的长小于 δ，而 $P\in R_{n_0+1}$，所以 $R_{n_0+1}\subset N(P,\ \delta)$，从而 $E\cap R_{n_0+1}\subset N(P,\delta)$，这说明在 $N(P,\delta)$ 中确有无穷多个属于 E 的点.

证完.

是E的边界点而不是E的聚点的点称为E的**孤立点**. 显然, E的孤立点一定属于E. 如果集合E的每一个点都是孤立点, 则称E为**孤立集合**.

我们来证明: 凡孤立集合都是有限集合或可数集合. 设E是孤立集合,对于任意$P\in E$,都应有$\delta_P>0$,使$N(P,2\delta_P)\cap E=\{P\}$. 我们在$N(P,\delta_P)$中取一有理点(即坐标全是有理数的点)记为$R_P$. 当$P_1$, P_2是E中两个不同的点时, 一定有$R_{P_1}\neq R_{P_2}$. 因若不然, $R_{P_1}=R_{P_2}$,则

$$\rho(P_1,P_2)\leqslant\rho(P_1,R_{P_1})+\rho(R_{P_1},P_2)=\rho(P_1,R_{P_1})+\rho(R_{P_2},P_2)<\delta_{P_1}+\delta_{P_2}\leqslant 2\max\{\delta_{P_1},\delta_{P_2}\}$$

不妨设$\max\{\delta_{P_1},\delta_{P_2}\}=\delta_{P_1}$. 于是$\rho(P_1,P_2)<2\delta_{P_1}$, 这说明$P_2\in N(P_1,2\delta_{P_1})$,从而$N(P_1,2\delta_{P_1})\cap E=\{P_1,P_2\}$. 矛盾. 总之,从$P\in E$到$R_P$的对应是一对一的. 由于全体有理点作成一可数集, 所以E有限或可数.

又E是孤立集合的充要条件是$E\cap E'=\varnothing$.

如果$E'=\varnothing$, 则E称为**离散集合**. 显然离散集合都是孤立集合,但孤立集合不一定是离散集合. 比如在$\mathbb{R}^1$中的点集$\left\{\frac{1}{n};n=1,2,3,\cdots\right\}$是孤立集合但不是离散集合,因为0是它的一个聚点.

习 题

1. 证明$P_0\in E'$的充要条件是对于任意含有P_0的邻域$N(P,\delta)$(不一定以P_0为中心)中,恒有异于P_0的点P_1属于E(事实上这样的P_1其实还是有无穷多个). 而P_0为E的内点的充要条件则是有含有P_0的邻域$N(P,\delta)$(同样,不一定以P_0为中心)存在, 使$N(P,\delta)\subset E$.

2. 设$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^1$是全体实数,$E_1$是$[0,1]$上的全部有理点,求$E_1'$,$\bar{E}_1$.

3. 设 $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^2$ 是普通的 xy 平面 $E_2=\{(x,y);\ x^2+y^2<1\}$，求 E_2'，$\bar{E}$。

4. 设 $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^2$ 是普通的 xy 平面，E_3 是函数

$$y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

的图形上的点所作成的集合．求 E_3'.

5. 证明当 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的不可数无穷点集时，E' 不可能是有限集.

§2 开集、闭集与完备集

在数学分析中我们常常遇到一类特殊的点集，即所谓区域．区域 D 的重要性质之一是：若点 $P\in D$，则一定有包含 P 于其内的一小块平面完全属于 D. 因此用我们现在用的术语来说就是 D 的每一个点都必须是内点.

定义 1 若集合 E 的每一个点都是它的内点，则 E 称为**开集**.

显然在 $\mathbb{R}^1$ 中 $(0,1)$ 是一开集（在 $\mathbb{R}^2$ 中就不是），$[0,1)$ 不是，在 $\mathbb{R}^2$ 中 $\{(x,y);x^2+y^2<1\}$ 是一开集（把它放在 $\mathbb{R}^3$ 中来看时，即看作 $\{(x,y,z);x^2+y^2<1,z=0\}$，就不再是开集了）.

又整个空间 $\mathbb{R}$ 以及空集 $\varnothing$ 都是开集.

定义 2 若 $E\supset E'$，即 E 包含了它所有的凝聚点，则 E 称为**闭集**.

显然在 $\mathbb{R}^1$ 中 $[0,1]$ 是闭集，$[0,1)$ 则不是（注意 $[0,1)$ 也不是开集），在 $\mathbb{R}^2$ 中 $\{(x,y);x^2+y^2\leqslant 1\}$ 是闭集，又整个空间 $\mathbb{R}^n$ 和空集 $\varnothing$ 以及任意的有限集合都是闭集（注意，$\mathbb{R}^n$ 和 $\varnothing$ 也是开集）.

定理 1 E'，$\bar{E}$ 恒为闭集.

证明 设 $P_0\in(E')'$，则由 §1，习题 1，在任意包含 P_0 的邻域 N 中恒应有点 $P_1\in E'$，$P_1\neq P_0$. 因为 $P_1\in E'$，于是又有属于 E 的 $P_2\in N$ 而且还可以要求 $P_2\neq P_0$，再利用 §1 习题 1 即得 $P_0\in E'$. 所

以 E' 是闭集.

因为 $\bar{E}=E\cup E'$, 故 $\bar{E}'=E'\cup(E')'\subset E'\cup E'=E'\subset\bar{E}$, 这证明 $\bar{E}$ 也是闭集.

定理 2 F 是闭集,则 F^c 是开集;G 是开集则 G^c 是闭集.

证明 设 $P_0\in F^c$, 则 $P_0\overline{\in}F$. 因 F 是闭集, 故 $P_0\overline{\in}F'$ 于是 $P_0\overline{\in}F\cup F'$. 从而应有包含 P_0 的某邻域 $N(P_0,\delta)$ 存在, 使 $N(P_0,\delta)\cap F=\varnothing$(§1, 习题 1),即 $N(P_0,\delta)\subset F^c$. 所以 P_0 是内点(§1, 习题 1 第二部分). 因 P_0 任意,故已证明了 F^c 是开集.

现设 $P_0\in(G^c)'$, 则于任意邻域 $N(P_0,\delta)$ 中均有无穷多点属于 G^c. 即 $N(P_0,\delta)$ 不能完全包含在 G 中, 所以 $P_0\overline{\in}G$, 即 $P_0\in G^c$, 这证明了 $(G^c)'\subset G^c$.

定理 3 任意一族闭集之交为闭集.

证明 设 $F=\bigcap\limits_i F_i$, F_i 为闭集, 因 $F\subset F_i$, 故 $F'\subset F_i'$, 但因这关系对于任何 F_i 均成立, 故 $F'\subset\bigcap\limits_i F_i'$ (第一章, §1, 定理 4, (3)). 但 $F_i'\subset F_i$, 故

$$\left(\bigcap_i F_i\right)'=F'\subset\bigcap_i F_i'\subset\bigcap_i F_i=F.$$

所以 F 是闭集.

定理 4 任意一族开集的并为开集.

证明 因为 $G=\bigcup\limits_i G_i=\left(\left(\bigcup\limits_i G_i\right)^c\right)^c=\left(\bigcap\limits_i G_i^c\right)^c$, 而由定理 2 及定理 3 即得.

定理 5 有限多个闭集之并仍为闭集.

证明 显然只要就两个集合的情形证明即可, 设 $F=F_1\cup F_2$, F_1,F_2 都是闭集, 则 $(F_1\cup F_2)'=F_1'\cup F_2'\subset F_1\cup F_2$, 所以 $F_1\cup$

F_2是闭集.

定理 6 有限多个开集之交仍为开集.

证明 因为 $G=\bigcap_{i=1}^{n} G_i=\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} G_i\right)^c\right)^c=\left(\bigcup_{i=1}^{n} G_i^c\right)^c$.

定理 5 和定理 6 中集合个数是有限这个限制是必需的.

例 设 $F_n=\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]$ $(n\geqslant 3)$，则 F_n 是闭集，而 $\bigcup_{n=3}^{\infty} F_n=(0,1)$不是闭集.

设 $G_n=\left(-1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)$，则 G_n 是开集，而 $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n=[-1,1]$不是开集.

定理 7 (Borel 有限覆盖定理) 设F是一有界闭集，$\mathscr{M}$ 是一族开邻域，$\mathscr{M}$ 完全覆盖了 F(即于 F 中任一点 x，恒有邻域 $N\in\mathscr{M}$ 使 $x\in N$)，则在 $\mathscr{M}$ 中一定存在有限多个邻域

$$N_1,N_2,\cdots,N_m,$$

它们完全覆盖了 F.

证明 下面的证明方法基本上是属于Lebesgue 的. 我们分作两步来证明.

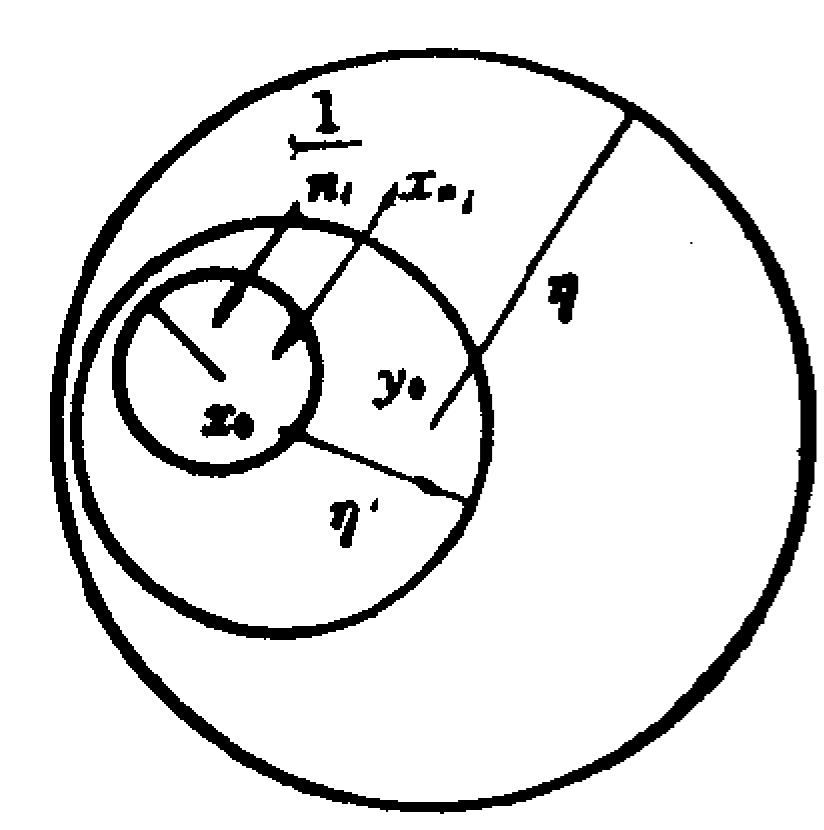


图 3

1° 先证明存在正数 δ，使任一以属于 F 的 x 为心的 δ 邻域，都将包含在某一个属于$\mathscr{M}$的开邻域内. 设不然，即没有这样的正数δ，则于任意正整数n，$\frac{1}{n}$ 都不能取作 δ，因而必有 $x_n\in F$，使

$N\left(x_n, \frac{1}{n}\right)$ 不包含在任何属于 $\mathscr{M}$ 的开邻域中. 由于 F 有界 $\{x_n\} \subset F$ 自然也是有界的. 如果 $\{x_n\}$ 有无限多个不同的元素, 则由 Bolzano-Weierstrass 定理, 有聚点 x_0, 如果 $\{x_n\}$ 只有有限多个不同的元素, 则至少有一个点 x_0 出现无限多次, 因此无论如何, 总有 $\{x_n\}$ 的一个子叙列 $\{x_{n_i}\}$, 使 $x_{n_i} \to x_0$, 注意 F 是闭集, 所以 $x_0 \in F$. 而 $\mathscr{M}$ 覆盖 F, 因此有 $N \in \mathscr{M}$, $x_0 \in N$. 设 $N = N(y_0, \eta)$, 则有 $\eta' > 0$, 使 $N(x_0, \eta') \subset N(y_0, \eta)$ (图3), 注意 $x_{n_i} \to x_0$, 所以可以取 n_i 充分大, 使 $\rho(x_{n_i}, x_0) < \frac{\eta'}{2}, \frac{1}{n_i} < \frac{\eta'}{2}$, 于是 $N\left(x_{n_i}, \frac{1}{n_i}\right) \subset N(x_0, \eta') \subset N(y_0, \eta) \in \mathscr{M}$. 这与 x_{n_i} 的定义矛盾. 这证明满足所述要求的 δ 是存在的 (这个正数 δ, 通称为 Lebesgue 数).

2° 因为 F 有界, 我们可以用平行于坐标平面的超平面将 F 分成有限多个小块, 使每一块中任意两点的距离都小于 δ, 设这些小块是 $F_1, F_2, \cdots, F_m$, 在每一 F_i 中任取一点 x_i, 作 x_i 的 δ 邻域 $N(x_i, \delta)$, 则应有 $N_i \in \mathscr{M}$ 使 $N(x_i, \delta) \subset N_i$. 于是得出属于 $\mathscr{M}$ 的有限多个开邻域 $N_1, \cdots, N_m$. 显然 $F = \bigcup_{i=1}^{m} F_i \subset \bigcup_{i=1}^{m} N_i$. 证完.

如果一个集合 E 的每一个点都是它自身的聚点 (即没有孤立点), 则 E 就称为自密的, 特别是自密的闭集称之为完备集, 写出来就是

定义 3 若 $E = E'$, 则 E 就称做完备集合.

显然空集 $\varnothing$ 是完备集.

表面看来, 既然一个完备集合一方面是闭集, 而另一方面每一个点又都是凝聚点, 似乎它就会铺满空间的一小块, 但是这是一种错觉, 下面的著名例子说明根本不是这么回事.

例 (Cantor 集合) 将封闭的区间 [0, 1] 均分为三段, 删去中间

的开区间$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，剩下两个闭区间$\left[0,\frac{1}{3}\right]$，$\left[\frac{2}{3},1\right]$.(图4)又把这两部分都均分为三段，删去中间的两个开区间，即$\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$，$\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$. 如此继续作下去，自然有些点是永远删不去的，例如$\frac{1}{3}$和$\frac{2}{3}$以及所有被删去的开区间的端点就是这样的点，所有永远删不去的点所作成的点集E就称为 Cantor 集合.

现在我们来证明 Cantor 集合E是一完备集合.

图 4

1° E是一闭集，即$E'\subset E$，事实上，设A是所有被删去的点作成的集合，则A是可数多个开集(开区间)的和，所以是开集，而$E=[0,1]-A=[0,1]\cap A^c$(第一章，§1 习题 2)故E是闭集(定理 2，定理 3).

2° E是自密的，即$E\subset E'$，首先我们注意在进行第一次删去手续以后所余下的两个闭区间的长度都是$\frac{1}{3}$，进行第二次删去手续以后剩下的四个闭区间的长度都是$\frac{1}{3^2}$，一般说来在进行n次删去手续以后，所余下来的2^n个闭区间的长度都是$\frac{1}{3^n}$，现设$x\in E$，(α,β)是包含x的任意一开区间，令$\delta=\min\{x-\alpha,\beta-x\}$，则$\delta>0$，故只要$n_0$取得充分大便有$\frac{1}{3^{n_0}}<\delta$. 既然$x$是永远删不去的点，$x$也应该属于删去$n_0$次以后所余下的某一个闭区间中，设这个闭区间是$I_{n_0}^i$，则$I_{n_0}^i\subset(\alpha,\beta)$，于是它的两个端点也应该在$(\alpha,\beta)$中，

但它们都是属于E的点，所以(α, β)中至少有一异于x的点属于E，这证明$x\in E'$（§1，习题1）.

总结1°和2°，我们已证明：Cantor集合是一完备集合，但是它显然不能包含任何区间，即对于任意$[\alpha, \beta]$，恒有$[\alpha, \beta]-E\neq\varnothing$.

一个集合E，如果它的闭包$\bar{E}$不包含任何邻域，则称为是无处稠密的. Cantor集合便是直线上的一个无处稠密的完备集.

Cantor集合在对许多问题的讨论中都有用处，因为它有许多很"奇特"的性质. 可以用来举出种种反例，破除许多似是而非的错觉. 现在大家不妨来计算一下在作Cantor集合时所去掉的那些开区间的长度的总和，便会看到那是1，即和$[0,1]$区间的长度一样，那么剩在Cantor集合中的点是不是就很少了呢？我们在下一节中将会看到，完全不是这样，Cantor集合的基数竟然是连续基数c. 即Cantor集合中点的"个数"是和$[0,1]$区间中点的"个数"一样的.

我们已知R^n中开集的余集是闭集，（可数多个）开集的并集还是开集，有限多个开集的交集还是开集，而可数多个开集的交，则不一定是开集了. 如果点集E是可数多个开集的交，则我们就说E是一G_δ集. 易见可数多个G_δ集的交还是G_δ集，不过可数多个G_δ集的并不再一定还是G_δ集了，所以我们把能表成可数多个G_δ集的并的点集称为$G_{\delta\sigma}$集，依此类推，还可定义$G_{\delta\sigma\delta}$集等等. 如果从闭集出发，我们可以定义能表成可数多个闭集的并的点集为F_σ集，能表成可数多个F_σ集的交的集合为$F_{\sigma\delta}$集等等. 如果我们用$\mathscr{G}$表R^n中全体开集，则上述这些集合都是可以从$\mathscr{G}$中元素出发，通过作取余集，作可数交，作可数并等手续而作出来的集合. 通常我们把由$\mathscr{G}$所产生的，R^n的子集的σ-域$\mathscr{F}(\mathscr{G})$记为$\mathscr{B}(R^n)$或$\mathscr{B}$. 称为R^n中的Borel集类，而$\mathscr{B}$中元素，则称为R^n

中的 Borel 集. 开集、闭集、F_σ 集，G_δ 集等等都是 Borel 集. 由定义即知 Borel 集的余集、可数交、可数并仍为 Borel 集. 于是一串 Borel 集的上、下极限也都是 Borel 集.

虽然 Borel 集合类是一个相当广泛的集合类，我们常见的点集几乎都是 Borel 集，但是确实还有许多不是 Borel 集的点集. 不过要讨论这个问题，已经超出了本课程的范围，我们只能在这里指出这个事实而不给出进一步的论证了. 好在在第三章 §3 中，我们就会见到一个不是 Borel 集合的点集的例子的.

习 题

1. 证明点集 F 为闭集的充要条件是 $\bar{F}=F$.

2. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上的实值连续函数，证明对于任意常数 a，$\{x;f(x)>a\}$ 都是开集，$\{x;f(x)\geqslant a\}$ 都是闭集.

3. 证明任何邻域 $N(P,\delta)$ 都是开集而且 $\overline{N(P,\delta)}=\{P';\ \rho(P',P)\leqslant\delta\}$.（$\bar{N}$ 通常称为一闭邻域.）

4. 设 Δ 是一有限闭区间，$F_n(n=1,2,3,\cdots)$ 都是 Δ 的闭子集，证明如果 $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n=\varnothing$，则必有正整数 N，使 $\bigcap_{n=1}^{N}F_n=\varnothing$.

5. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. $\mathscr{M}$ 是一族完全覆盖 E 的开邻域，则有 $\mathscr{M}$ 中的可数(或有限)多个邻域 $N_1,\cdots,N_m,\cdots$ 它们也完全覆盖了 E.（Lindelof 定理）

6. 证明 $\mathbf{R}^n$ 中任何开集 G 都可表成 $G=\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i^{(n)}$ 的形式，其中 $I_i^{(n)}=\{P;P=(x_1,\cdots,x_n),c_j^{(i)}<x_j<d_j^{(i)},j=1,\cdots,n\}$.

7. 试根据 Borel 有限覆盖定理证明 Bolzano-Weierstrass 定理.

8. 证明 $\mathbf{R}^n$ 中任何非空开集的基数都是 c.

9. 证明对任意 $E\subset\mathbf{R}^n$，$\bar{E}$ 都是 $\mathbf{R}^n$ 中包含 E 的最小的闭集.

10. 对于在 $\mathbf{R}^1$ 上定义的实函数 $f(x)$，令

$$\omega(f,x)=\lim_{\delta\to0^+}\sup_{|x'-x|<\delta}f(x')-\lim_{\delta\to0^+}\inf_{|x'-x|<\delta}f(x'),$$

证明对任意 $\varepsilon>0$，$\{x;\omega(f,x)\geqslant\varepsilon\}$ 都是闭集，进而证明 $f(x)$ 的全体不连续点

作成一 F_σ 集.

11. 于 $E\subset\mathbf{R}^n$ 及实数 a. 定义 $aE=\{(ax_1,\cdots,ax_n);\ (x_1,\cdots,x_n)\in E\}$. 证明当 E 为开集时 aE 为开集，当 E 为闭集时，aE 为闭集.

12. 设 $f(P)$ 是定义于 $\mathbf{R}^n$ 上的实函数. 证明 $f(P)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续的充要条件是对于 $\mathbf{R}^1$ 中任何开集 G，$f^{-1}(G)\triangleq\{P;f(P)\in G\}$ 都是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集.

13. $\mathbf{R}^n$ 上的实函数 $f(P)$ 称为是下半连续的，如果对任意 $P\in\mathbf{R}^n$ 都有 $f(P)\leqslant\liminf\limits_{Q\to P}f(Q)\triangleq\lim\limits_{\delta\to 0^+}(\inf\limits_{\rho(P,Q)<\delta}f(Q))$. 证明 $f(P)$ 下半连续等价于对任意实数 a，$\{P;f(P)\leqslant a\}$ 都是 $\mathbf{R}^n$ 中的闭集，也等价于 $\{(P,y);P\in\mathbf{R}^n,f(P)\leqslant y\}$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的闭集.

14. 设 A,B 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集，$0<\lambda<1$，证明

$$\lambda A+(1-\lambda)B\triangleq\{x;x=(x_1,\cdots,x_n)，有 (y_1,\cdots,y_n)\in A,$$
$$(z_1,\cdots,z_n)\in B，使 x_i=\lambda y_i+(1-\lambda)z_i,\ i=1,\cdots,n\}$$

为有界闭集. 举例说明当 A,B 无界时，$\lambda A+(1-\lambda)B$ 可以不是闭集.

§3 p 进位表数法

为了今后的应用，我们来介绍 p 进位表数法，此处 p 可以是任意的大于 1 的正整数.

图 5

设 x 是任意一个小于 1 的正实数，即 x 是开区间 $(0,1)$ 上的一个点，现用分点 $C_0^1=0,C_1^1,C_2^1,\cdots,C_{p-1}^1,C_p^1=1$，将闭区间 $[0,1]$ 均分为 p 段（图 5 是 $p=3$ 的情形），若 x 不是分点，则应有唯一的一小段 $[C_{a_1}^1,C_{a_1+1}^1]$ 包含 x，a_1 是一个不大于 $p-1$ 的整数（a_1 可能为 0），此时我们就说 x 的第一位小数是 a_1. 如果 $x=C_i^1(0<i<p)$ 是一个分点，则包含 x 的小段就有两个，即 $[C_{i-1}^1,C_i^1]$ 和 $[C_i^1,C_{i+1}^1]$. 所以此时 x 的第一位小数的取法也就有两个，即 $i-1$ 和 i，我们称取 $a_1=i-1$ 时为第一种表示法，取 $a_1=i$ 时为第二种表示法. 现设已取定了一种，于是又可用分点 $C_0^2=C_{a_1}^1$，C_1^2，$\cdots$，C_{p-1}^2，$C_p^2=C_{a_1+1}^1$，将区间 $[C_{a_1}^1,C_{a_1+1}^1]$ 均分为 p 等分. 仿照前面的办法，我

们定义 x 的第二位小数为 a_2. 当然如果 x 不是第一次分割时的分点,但却是第二次分割的分点, 则在定第二位小数时,又应该有两种表示法. 而如果 x 是第一次分割时的分点, 即 $x=C_0^2$ 或 C_p^2, 则 x 还是只能属于唯一的一小段, 因此它们的第二位小数只有一个取法,并且在 $x=C_0^2$(即定第一位小数用了第二种表示法时), 第二位小数 a_2 必须为 0, 并且以后各位小数也永远是 0; 在 $x=C_p^2$ 时(即定第一位小数用了第一种表示法时), 第二位小数必为 $p-1$, 而且以后各位小数也永远是 $p-1$. 继续这个手续, 如果 x 永远不是分点,则

$$x \sim 0.a_1a_2a_3\cdots,$$

表示法是唯一的,如果 x 是第 k 次的分点, 而不是第 $k-1$ 次的分点,则

$$x \sim \begin{cases} 0.a_1a_2\cdots a_{k-1}b_k \quad (p-1)(p-1)\cdots & (k\text{ 位以后均为}p-1) \\ 0.a_1a_2\cdots a_{k-1}(b_k+1) \quad 0 \quad 0 \quad \cdots & (k\text{ 位以后均为}0) \end{cases} \quad (*)$$

有两种表示法.

注意要 x 为第 k 次分割的分点, 必须且只须 x 可以写成 $\frac{m}{p^k}(0<m<p^k)$的形式,故我们得出结论:对于(0,1)上的每一点 x, 如果 $x \neq \frac{m}{p^k}$ $(0<m<p^k)$,则 x 可唯一地表成 p 进位无穷小数的形式:

$$x=0.a_1a_2a_3\cdots,$$

而如果 x 是$\frac{m}{p^k}$之形式,则它就有两种表示法.

到现在为止,我们的 p 进位表数法还并没有完成,因为我们还不知道是否任意一个由小于 p 的非负整数作成的"序列"

$$0.a_1a_2a_3\cdots \qquad (**)$$

也都表示一个(0,1)上的点, 而且当它不是(*)式右端的那种形式

时这种对应是否还是一对一的，即不同的“序列”必定对应不同的点，但这显然是对的，因为对于任意一个序列(**)，我们总可以按照$a_1, a_2, a_3, \cdots$出现的次序，从我们上述的区间分割过程中挑出一串逐个包含的闭区间来，它们的长度$\frac{1}{p^n}\to 0(n\to\infty)$，故由 Cantor 的闭区间套定理，应有唯一的一点 x 属于所有这些闭区间，显然与 x 对应的无穷“序列”就是(**)，故

$$x=0.a_1a_2a_3\cdots$$

而且如果(**)不是(*)式中右端的那种“序列”，则所挑出的那一串闭区间不会从某一个以后所有的闭区间都有一个共同的端点，因此与(**)对应的 x 还是唯一的，同样，如果(**)是(*)式右端那种形式，则它所对应的点就是$\frac{m}{p^k}$形式的，同时对应就不再是 1—1 对应.

如果 $p=10$，则所有 a_i 都是由数字 0，1，2，…，9 作成的，得出的就是普通的十进位表示法，如果 $p=2$，则 a_i 或为 0 或为 1，这就是二进位表示法.

大家在学习前一节的 Cantor 集合时，或许会产生一个问题，那些永远去不掉的点到底是哪些点呢？甚至还会怀疑是不是最后就只剩下那些分点了？如果我们对于(0，1)上的点使用三进位表数法，则这个问题的解答就变得非常明显了，因为作 Cantor 集合时，每次都是把区间分为三等分，而去掉的是中间那段，因此去掉的点在用三进位表示时，必然出现 1 这个数字，反之任意一个不是分点的 x，如果它的三进位表数法中有 1 这个数字，则在经过若干次删去以后，x 必然在被删去的区间里边，即 x 不属于 Cantor 集合，所以 Cantor 集合就是由 0，1 以及(0，1)上的所有那样的 x 组成的，它们在表成三进位小数时不会出现数字 1（当然对于那些有两

种表示法的分点，要适当地选定表示法，才能使其中不出现数字1).

如果我们再利用二进位小数法将(0,1)中的点表成二进位小数，则不难看出 Cantor 集合中的点是可以和(0,1) 1－1 对应起来的，所以它具有连续基数，这也就说明了 Cantor 集合中不是只有那些分点的，因为全部分点显然作成一可数集合.

定理 设 $\mathscr{D}$ 代表所有由 0,1 两个数字重复排列而成的序列；则 $\mathscr{D}\sim(0,1)$.

证明 如果我们将(0,1)中的任意 x 用二进位小数表出，则确实每一个 x 都对应由 0,1 重复排成的序列. 但是这种对应不是一对一的，因为每一个形如 $\frac{m}{2^n}$ 的数都有两种表示法，因此对应两个这样的序列，现在我们约定只用第一种表示法，于每个 $x\in(0,1)$ 就对应于唯一的一个由 0,1 重复排成的序列. 现在我们将对应于删去了的二进位表示法的那些序列以及序列0,0,0,…和1,1,1,…作成集合 T，则 T 自然是可数的（因为所有形如$\frac{m}{2^n}$ 的数组成可数集合)，而 $\mathscr{D}-T$ 与(0,1)的对应已经是一对一的了，所以

$$\mathscr{D}-T\sim(0,1).$$

于是若 $N=\{1,2,3,\cdots\}$，则

$$\mathscr{D}=(\mathscr{D}-T)\cup T\sim(0,1)\cup N.$$

但由第一章 §3 定理 7，$(0,1)\cup N\sim(0,1)$. 故 $\mathscr{D}\sim(0,1)$.

习　题

1. 证明由(0, 1)开区间中的实数 x 组成的实数序列的全体作成一基数为 c 的集合. 进而证明由任何实数组成的实数序列的全体所作成的集合的基数也是 c.

2. 证明区间[0,1]上的全体连续函数所作成的集合的基数是 c，同样[0,1]上的左连续的单调函数的全体所构成的集合的基数是 c.

§4 一维开集、闭集、完备集的构造

本节专门讨论一维空间，即数直线上的开集、闭集及完备集的结构. 在本节中，一切点集都是一维空间 $\mathbf{R}^1$ 中的数集，不再逐次声明.

定理1 任何非空的有界开集都是有限多个或可数多个互不相交的开区间的并. 这些开区间的端点都不属于这个开集.

证明 设开集 $G\subset(-M,M)$，对于任意 $x\in G$. 因 G 为开集，故有开区间 (α,β)，使 $x\in(\alpha,\beta)\subset G$. 令 $E_\alpha=\{x:x\overline{\in}G,x\leqslant\alpha\}$. 显然 E_α 是非空的且以 α 为一上界. 记 E_α 的上确界为 α'，则 $\alpha'\leqslant\alpha$. 而且 $\alpha'\overline{\in}G$，因为若 $\alpha'\in G$，则 $\varepsilon>0$ 充分小时 $(\alpha'-\varepsilon,\alpha'+\varepsilon)\subset G$. 而 α' 是 E_α 的上确界，所以应有 $y\in E_\alpha$ 使 $\alpha'\geqslant y>\alpha'-\varepsilon$. 由 E_α 定义 $y\overline{\in}G$，与 $(\alpha'-\varepsilon,\ \alpha'+\varepsilon)\subset G$ 矛盾. 可见 $\alpha'\overline{\in}G$ 必然成立. 但在 (α',α) 之上是不能再有点不属于 G 的，故 $(\alpha',\beta)\subset G$. 同样地，我们可以适当地放大 β 成 β'（如果有这种必要的话），使 $(\alpha',\ \beta')\subset G$，$\alpha',\beta'\overline{\in}G$，这事实上是说将 (α,β) 尽可能地放大，直到遇到不属于 G 的点为止，如果以 I_x 表示这样得出来的包含 x 的开区间 (α',β')，则显然，对于不同的点 $x,x'\in G$，或者 $I_x=I_{x'}$，或者 $I_x\cap I_{x'}=\varnothing$，因此由第一章§3习题2即知 $\{I_x\}_{x\in G}$ 中至多有可数多个彼此互异的开区间，设其为

$$I_1,I_2,I_3,\cdots,$$

则显然 $G\subset\bigcup_{i=1}^{m}I_i$（$m$: 有限或$\infty$），但另一方面 $G\supset I_i$ 恒成立，故又有 $G\supset\bigcup_{i=1}^{m}I_i$，于是 $G=\bigcup_{i=1}^{m}I_i$（m: 有限或∞）.

定理 2 设 F 是一非空的有界闭集，则 F 中必有一最大点（最大数）和一最小点（最小数）.

证明 因 F 有界，故有 M 使 $|x|\leqslant M$ $(x\in F)$. 从而

$$x\leqslant M \qquad (x\in F),$$

即所有 x 作成一有上界的数集，设 μ 是它的上确界，则要证 F 有最大点只须证明 $\mu\in F$ 即可. 因为 μ 是上确界，故于任意 $\varepsilon>0$，恒有 $x'\in F$ 使 $\mu\geqslant x'>\mu-\varepsilon$，若 $\mu=x'$ 则 $\mu\in F$，若 $\mu\neq x'$，则这说明 $\mu\in F'$，于是也有 $\mu\in F$，所以 F 中有最大点已得证。类似地我们可以证明 F 中有最小点 ν.

定理 3 设 F 是一非空的有界闭集，则 F 是由一闭区间中去掉有限个或可数多个互不相交的开区间而成，这些开区间的端点都还是属于 F 的.

证明 由定理 2 知 $F\subset[\nu,\mu]$，ν，$\mu\in F$，故

$$G=[\nu,\mu]-F=(\nu,\mu)-F=(\nu,\mu)\cap F^c$$

是一有界开集. 因此由定理 1 知是有限个或可数多个互不相交的开区间的和，$G=\bigcup\limits_{i=1}^{m}I_i$，这些区间的端点都是不属于 G 的，因此属于 F. 又 $G\subset[\nu,\mu]$，故

$$F=[\nu,\mu]-G=[\nu,\mu]-\bigcup_{i=1}^{m}I_i(m\text{: 有限或}\infty).$$

定理得证.

定理 3 中所述各区间，通常即称为 F 的邻接区间.

因为有限个或可数多个开区间的并一定是开集，从闭区间中去掉有限个或可数多个开区间以后，所得的也一定是闭集，故我们已经完满地解决了线性开集和闭集的结构的问题.

定理 4 非空的有界闭集 F 是完备集合的充要条件是：F 是

从一闭区间$[a,b]$中去掉有限个或可数多个彼此没有公共端点且与原来的闭区间也没有公共端点的开区间而成．这些区间的端点都是属于F的．

证明 根据定理3及上面所作之说明，要证的只有这些区间彼此没有共同的端点，但这是显然的，因为去掉的这些区间的端点都是属于F的，所以$x\in F$是孤立点的充要条件是：它是两个被去掉的区间的共同端点，或者是$[a,b]$与某一个被去掉的区间的共同端点．

习 题

1．证明全体有理数所构成的集合不是G_δ集，即不能表成可数多个开集的交．

2．证明$[0,1]$上全体无理数所作成的集合不是F_σ集．

3．证明不可能有在$[0,1]$上定义的在有理点处都连续在无理点处都不连续的实函数．

4．证明R^1中全体开集构成一基数为c的集合．从而R^1中全体闭集也构成一基数为c的集合．

§5 点集间的距离

现在我们还是回头来考虑一般n维空间R^n中的点集．

定义 设A,B是R^n中两个不空的点集，我们定义A和B之间的**距离**为

$$\rho(A,B)=\inf\{\rho(P,Q);P\in A,Q\in B\}.$$

如果A是由唯一的一个点P所作成的单点集，则A和B之间的距离也称为点P到点集B的距离，并直接记为$\rho(P,B)$．即

$$\begin{aligned}\rho(P,B)&=\rho(\{P\},B)\\&=\inf\{\rho(P,Q);Q\in B\}.\end{aligned}$$

显然对于任意两个非空点集A,B都有$\rho(A,B)\geqslant0$，并且如

果 $A\cap B\neq\varnothing$，则 $\rho(A,B)=0$. 但是 $\rho(A,B)=0$ 并不一定 $A\cap B\neq\varnothing$. 例如 $A=(-1,\ 0)$，$B=(0,1)$时，$A\cap B=\varnothing$. 但是显然 $\rho(A,B)=0$.

定理 1 设 A，B 为两个非空闭集，且其中至少有一个有界，则必有 $P^*\in A, Q^*\in B$ 使

$$\rho(P^*,Q^*)=\rho(A,B).$$

证明 我们假定 A 有界，$A\subset R=\{P;\ |x_i|\leqslant M,\ i=1,2,\cdots,n\}$. 因为 $\rho(A,B)$是数集$\{\rho(P,Q)\}$的下确界，故于正数 $\frac{1}{n}$，恒有$\{\rho(P,Q)\}$中的 $\rho(P_n,Q_n)$使

$$\rho(A,B)\leqslant\rho(P_n,Q_n)<\rho(A,B)+\frac{1}{n}.$$

此处 $P_n\in A, Q_n\in B$，于是得到一个序列

$$(P_1,Q_1),(P_2,Q_2),\cdots,(P_n,Q_n),\cdots.$$

因为 A是有界的，故单看点列

$$P_1,P_2,P_3,\cdots,P_n,\cdots$$

时或者是由有限多个元素重复排列而成，或者是一无穷有界集，所以总可以从中挑出一子序列

$$P_{n_1},P_{n_2},\cdots,P_{n_k},\cdots,$$

使它和某定点 P^* 的距离趋于 0(§1，定理 4 与定理 1)，即 $\rho(P_{n_k},P^*)\to0\ (k\to\infty)$，注意 A是闭集，故还有 $P^*\in A$.

现在我们再来看与$\{P_{n_k}\}$对应的那些Q作成的子序列

$$Q_{n_1},Q_{n_2},\cdots,Q_{n_k}\cdots,$$

因为

$$\begin{aligned}\rho(Q_{n_k},O)&\leqslant\rho(Q_{n_k},P_{n_k})+\rho(P_{n_k},O)\\&\leqslant\rho(A,B)+\frac{1}{n_k}+\sqrt{n}M\end{aligned}$$

$$\leqslant \rho(A,B)+n^{\frac{1}{2}}M+1,$$

所以也是有界的，此处O是 $(0, 0,\cdots,0)$ 点．于是和 $P_1,P_2,\cdots,P_n,\cdots$ 一样，也应该有一个子序列$\{Q_{n_{k_i}}\}$它与某定点 Q^* 之距离趋向于 0，即 $\rho(Q_{n_{k_i}},Q^*)\to 0(i\to\infty)$，又 $Q^*\in B$，但是$\{P_{n_{k_i}}\}$为$\{P_{n_k}\}$之子序列，故 $i\to\infty$ 时 $\rho(P_{n_{k_i}},P^*)\to 0$，从而

$$\begin{aligned}\rho(A,B)\leqslant\rho(P^*, Q^*)&\leqslant \rho(P^*,P_{n_{k_i}})+\rho(P_{n_{k_i}},Q_{n_{k_i}})\\&+\rho(Q_{n_{k_i}},Q^*)<\rho(P^*,P_{n_{k_i}})+\rho(A,B)\\&+\frac{1}{n_{k_i}}+\rho(Q_{n_{k_i}},Q^*)\\&\to\rho(A,B)\qquad(i\to\infty).\end{aligned}$$

所以 $\rho(P^*,Q^*)=\rho(A,B)$．定理证完．

定理 2 设E是一点集，$d>0$，U是所有到E的距离小于d的点P作成的点集，即

$$U=\{P;\rho(P,E)<d\}$$

则U是一开集，且$U\supset E$．

证明 留作习题．

定理 3 **(隔离性定理)** 设 F_1，F_2是两个非空有界闭集，$F_1\cap F_2=\varnothing$，则有开集 G_1,G_2 使 $G_1\supset F_1,G_2\supset F_2,G_1\cap G_2=\varnothing$．

证明 既然 $F_1\cap F_2=\varnothing$，从定理 1 便有 $r=\rho(F_1,F_2)>0$，令

$$G_1=\left\{P;\rho(P,F_1)<\frac{r}{2}\right\},$$

$$G_2=\left\{Q;\rho(Q,F_2)<\frac{r}{2}\right\},$$

则由定理 2，G_1,G_2 都是开集，$G_1\supset F_1,G_2\supset F_2$，现证 $G_1\cap G_2=\varnothing$．设不然，即有 $P^*\in G_1\cap G_2$，则从 G_1,G_2 的定义，应有点 $P_1\in F_1$，$Q_1\in F_2$，使

$$\rho(P^*,P_1)<\frac{r}{2},\ \rho(P^*,Q_1)<\frac{r}{2}.$$

于是

$$r\leqslant\rho(P_1,Q_1)\leqslant\rho(P_1,P^*)+\rho(P^*,Q_1)$$
$$<\frac{r}{2}+\frac{r}{2}=r$$

矛盾.

习　题

1. 证明定理 2.

2. 证明任何闭集都可表成可数多个开集的交.

3. 举例说明定理 1 中的 A,B 都无界时结论不成立.

4. 取消定理 3 中 F_1,F_2 有界的限制.

5. 设 $E\subset\mathrm{R}^n,E\neq\varnothing$. 证明 $\rho(P,\ E)$是P的在 R^n 上一致连续的函数.

6. 证明对于 R^n 中任意两个不相交的非空闭集 F_1, F_2,都有 R^n 上的连续函数 $f(P)$,使 $0\leqslant f(P)\leqslant1$ 且在 F_1 上 $f(P)\equiv0$, 在 F_2 上 $f(P)\equiv1$.

第三章 测度理论

实变函数论这一课程的中心问题是要介绍一种新的积分——Lebesgue积分的理论.

古典的积分理论，即数学分析中介绍的Riemann积分理论，基本上是处理几乎连续的函数的. 但是伴随着理论的发展，Riemann积分理论的欠缺变得愈来愈明显了.

首先人们发现只限于考虑几乎连续的函数，常常使建立起来的理论不够完备，这既造成应用时的不灵便，还时常严重地影响到理论的进一步发展. 例如Fourier分析理论中极为重要的Riesz-Fisher定理(见第六章§2)在Riemann积分之下，就是不可能成立的①. 所以如不扩大所考虑的函数的范围，理论的发展就将遇到阻碍. 这种例子还有许多，如微分方程中广义解的引入等等，此处不再列举. 至于说Riemann积分理论应用起来不灵便，突出的一个例子是关于逐项积分，在Riemann积分理论中，要逐项积分，一般常假定所论函数级数具有一致收敛性，可是在处理实际问题时，这个一致收敛的要求常常得不到满足，或者招致繁复的论证，带来许多的麻烦. 1897年Osgood证明当可积函数的序列一致有界时，只要极限函数仍然可积，即使不一致收敛，也是可以逐项积分的②. 这说明改进积分的定义，使之适用于更广泛的函数类，是很有必要的.

---

① 江泽坚,《实变函数》,高等教育出版社，1959,第四章§4.

② Osgood, Non-uniform Convergence and the Integration of Series Term by Term, American J. of Math. Vol. 19, pp. 155—190,不过当时他考虑的是连续函数序列.

对于非负函数来说，$f(x)$在$[a,b]$上的积分是可以理解为它的下方图形

$$G([a,b];f)=\{(x,y);a\leqslant x\leqslant b,0\leqslant y<f(x)\}$$

的面积的 所以什么样的(非负)函数可积是和平面上什么样的点集有面积的问题紧密相关的. 这说明如果我们想改进积分的定义，那么从研究什么是点集的面积(在一维空间中是长度、三维空间中是体积，在更高维的空间中我们称之为测度)和研究什么样的点集有面积入手，应该说是很自然的，也就是说应该先研究所谓的测度问题.

§1 外 测 度

现在我们就来研究测度问题. 为了使建立的理论，适用于一般情况，我们针对n-维空间$\mathbf{R}^n$中的点集来讨论.

首先我们约定n-维空间$\mathbf{R}^n$中的开区间I是指点集

$$\{x=(x_1,\cdots,x_n);a_i<x_i<b_i,i=1,\cdots,n\},$$

其中a_i,b_i是常数，$a_i\leqslant b_i,i=1,\cdots,n$. (因此空集也是开区间). 又如果我们只说$I$是一区间，则是说上述定义中的不等式中可能有等号出现 对于任意区间I，我们令

$$|I|=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$$

称之为I的体积. 在$n=1$和2时，$|I|$其实是I的长度和面积. 所谓要研究什么是点集的测度，就是要想法把这个只对区间界定了的“体积”概念扩充到更一般的点集上去.

设$E\subset\mathbf{R}^n$. 为了求E的“测度”，我们自然会想到用一些开区间把E盖住，然后计算这些开区间的“体积”的和并求其下确界，这就导致下述定义:

定义 设E是$\mathbb{R}^n$中的一点集，$\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$是$\mathbb{R}^n$中的开区间的一个序列，$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset E$，则$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|$确定一个非负的数$u$（也可能是$+\infty$）. 所有这样得出的$u$所组成的数集是下方有界的，它的下确界便称为$E$的(Lebesgue)**外测度**. 记为$m^*E$. 当然$m^*E$也可能等于$+\infty$.

由于区间的"体积"是相对于平移运动不变的. 所以集合的外测度显然也是相对于平移运动不变的. 外测度还有下述四条基本性质:

(i) $m^*E \geqslant 0, m^*\varnothing = 0$,

(ii) 若$A \supset B$，则$m^*A \geqslant m^*B$,

(iii) $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^*A_n$,

(iv) 若A和B的距离$\rho(A, B) > 0$，则$m^*(A \cup B) = m^*A + m^*B$.

性质(i)是显然成立的.

性质(ii)的证明 对于任意一串其并集能覆盖A的开区间$I_1, I_2, I_3, \cdots$，由于$A \supset B$，$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset B$. 所以$m^*B \leqslant u = \sum_{n=1}^{\infty}|I_n|$，于是$m^*B \leqslant \inf\{u\} = m^*A$.

性质(iii)的证明 对于任意常数$\varepsilon > 0$，由外测度定义，对于每一n，都应有开区间序列$\{I_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$，使

$$A_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} I_{n,m}, \quad \sum_{m=1}^{\infty}|I_{n,m}| \leqslant m^*A_n + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

从而

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} I_{n,m},$$

且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |I_{n,m}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(m^* A_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^* A_n + \varepsilon,$$

于是

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |I_{n,m}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^* A_n + \varepsilon.$$

但 $\varepsilon>0$ 是任意的，所以 $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^* A_n$.

性质(iv)的证明：为简便计且只就一维空间的情形证明．对于任意常数 $\varepsilon>0$，由 $m^*(A\cup B)$ 的定义应有开区间 $I_1, I_2, \cdots, I_n, \cdots$ 使

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset A\cup B, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leqslant m^*(A\cup B) + \varepsilon.$$

设 $\rho(A, B)=d$，则 $d>0$．现在逐个考察这些开区间 I_n，如果 I_n 的长度 $|I_n|<d$，则 I_n 保留；如果 $|I_n|\geqslant d$ 则用分点将 I_n 分解成有限多个，比如说 m_n 个长度都小于 d 的小区间 $J_{n,1}, \cdots, J_{n,m_n}$．然后再用 m_n-1 个小区间 $L_1^{(n)} \cdots L_{m_n-1}^{(n)}$ 将分点盖住，使每个 $L_i^{(n)}$ 的长度都小于 d 且 $\sum_{i=1}^{m_n-1} |L_i^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{2^n}$．将所有保留下来的 I_n，改造某些 I_n 而得到的开区间 $J_{n,i}$ 和 $L_j^{(n)}$ 全部取来，便得到可数多个开区间，记之为 $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$，则

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset A\cup B,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}|K_m|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}<m^*(A\cup B)+2\varepsilon.$$

由于每一个 K_n 的长度都小于 $d=\rho(A, B)$，任何 K_n 都不能同时既含有 A 的点又含有 B 的点. 我们将这些 K_n 分为两组，第一组中的 K_n 都含有 A 的点，第二组中的 K_n 都不包含 A 的点，分别记之为$\{K_n'\}$ 和$\{K_n''\}$，则 $\bigcup_n K_n'\supset A$, $\bigcup_n K_n''\supset B$. 于是

$$m^*(A\cup B)+2\varepsilon\geqslant\sum_{m=1}^{\infty}|K_m|=$$

$$\sum_n|K_n'|+\sum_n|K_n''|\geqslant m^*A+m^*B.$$

注意 $\varepsilon>0$ 是任意的，所以

$$m^*(A\cup B)\geqslant m^*A+m^*B.$$

另一方面，从基本性质(iii)显然有 $m^*(A\cup B)\leqslant m^*A+m^*B$. 所以我们最终得到了

$$m^*(A\cup B)=m^*A+m^*B.$$

证明至此全部完成.

要说明外测度是原来只对区间有意义的"体积"概念的一种拓广，我们还必须证明当 I 是一区间时，$m^*I=|I|$. 为了避免符号上的繁杂，我们仍只就一维空间的情形来证明.

设 $I=(a, b)$. $\bar{I}=[a, b]$是相应的闭区间. 由于单点集$\{a\}$，$\{b\}$的外测度显然是零. 所以从基本性质(ii)和(iii)可知

$$m^*I\leqslant m^*\bar{I}\leqslant m^*I+m^*\{a\}+m^*\{b\}=m^*I.$$

于是 $m^*I=m^*\bar{I}$. 另外从外测度的定义显然还有 $m^*I\leqslant|I|$. 所以我们只要证明 $m^*\bar{I}\geqslant|I|$就可以了.

为此我们先证明如果有限多个开区间 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 的并包含

某一闭区间 I_0，则必有 $\sum_{i=1}^{n}|I_i|\geqslant|I_0|$. 当 $n=1$ 时，这是显然的.

设已知当 $n=k$ 时上述事实成立，往证 $n=k+1$ 时仍成立. 设 $I_0=[\alpha,\beta]$ 被 $I_1,I_2,\cdots,I_{k+1}$ 这 $k+1$ 个开区间所覆盖，$I_i=(\alpha_i,\beta_i)$. 不妨设 $\beta_{k+1}\geqslant\beta_i$, $i=1,2,\cdots,k$. 如果 $\alpha_{k+1}<\alpha$，则 $I_0\subset(\alpha_{k+1},\beta_{k+1})$，所以

$$|I_0|=\beta-\alpha<\beta_{k+1}-\alpha_{k+1}\leqslant\sum_{i=1}^{k+1}|I_i|;$$

如果 $\alpha\leqslant\alpha_{k+1}<\beta$，则 $I_1,\cdots,I_k$ 的并包含闭区间 $I_0^*=[\alpha,\alpha_{k+1}]$. 因此由假设

$$\sum_{i=1}^{k}|I_i|\geqslant|I_0^*|=\alpha_{k+1}-\alpha.$$

从而

$$\sum_{i=1}^{k+1}|I_i|\geqslant\alpha_{k+1}-\alpha+|I_{k+1}|=\beta_{k+1}-\alpha\geqslant|I_0|.$$

最后，如果 $\alpha_{k+1}\geqslant\beta$，则 $\bigcup_{i=1}^{k}I_i\supset I_0$，因而也有

$$\sum_{i=1}^{k+1}|I_i|\geqslant\sum_{i=1}^{k}|I_i|\geqslant|I_0|.$$

这样，根据数学归纳法即知上述事实对任何 n 都成立.

现在设 $I_1,I_2,\cdots,I_n,\cdots$ 是一串开区间，$\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\supset\bar{I}$. 由 Borel 有限覆盖定理，我们可从这些区间中选出有限多个：$I_{n_1},I_{n_2},\cdots,I_{n_m}$，使 $\bigcup_{i=1}^{m}I_{n_i}\supset\bar{I}$. 从而由前面已证明了的事实便知

$$|\bar{I}|\leqslant\sum_{i=1}^{m}|I_{n_i}|\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}|I_m|.$$

由于上述不等式对任意一串并集包含 $\bar{I}$ 的开区间都成立. 所以 $m^*\bar{I}\geqslant|\bar{I}|=|I|$. 这完成了我们所要的证明.

习　题

1. 证明若 E 有界, 则 $m^*E<+\infty$.

2. 证明任何可数点集的外测度都是零.

3. 证明对于一维空间 $\mathbf{R}^1$ 中任何外测度大于零的有界集合 E 及任意常数 μ, 只要 $0\leqslant\mu\leqslant m^*E$, 就有 $E_1\subset E$, 使 $m^*E_1=\mu$.

4. 证明如果 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $\mathbf{R}^2$ 中的点集 $\{(x,y);a\leqslant x\leqslant b,y=f(x)\}$ 的外测度为零.

5. 对于 $\mathbf{R}^n$ 中的点集 E 及 $\alpha>0$, 令

$$\alpha E=\{(\alpha x_1,\cdots,\alpha x_n);(x_1,\cdots,x_n)\in E\}.$$

证明 $m^*(\alpha E)=\alpha^n m^*E$.

6. 证明只要 $m^*E>0$, 就一定有 $x\in E$, 使对任意 $\delta>0$ 都有 $m^*(E\cap N(x,\delta))>0$. 此处 $N(x,\delta)$ 是以 x 为心, 以 δ 为半径的邻域.

7. 试就二维空间 $\mathbf{R}^2$ 证明外测度在旋转变换下也是不变的. (提示: 先证任何长方形的外测度都等于其面积.)

§2　可测集合

在上一节中, 我们定义了 $\mathbf{R}^n$ 中点集的外测度. 根据这个定义, n 维空间中的任何点集 E 都有一确定的 (有限或无限的) 外测度 m^*E, 而且当 E 是一区间时, m^*E 就是它的"体积". 那么我们是不是已经完全解决了在本章的引言中所提出的测度问题呢? 考察一下外测度的四条基本性质, 就会发现性质 (iv) 中的条件 $\rho(A,B)>0$ 比较特别. 根据我们在处理长度、面积、体积问题时的经验, 当两个图形不相交时, 它们的面积(长度、体积)就应该可以相

加. 但现在却要求 $\rho(A,B)>0$,而这是比 A,B 不相交要苛刻得多的条件，那么是不是基本性质(iv)中的条件 $\rho(A, B)>0$ 可以放宽为 $A\cap B=\varnothing$ 呢？下面我们来说明情况不是这样.

假如基本性质(iv)中的 $\rho(A, B)>0$ 可以放宽为 $A\cap B=\varnothing$，那么对于任意有限多个互不相交的点集 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 便应有

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}m^*E_i.$$

进而对于任意一串互不相交的点集 $E_1,E_2,\cdots,E_n,\cdots$ 便有

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\geqslant m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}m^*E_i,$$

由于这一不等式对任意 n 都成立，令 $n\to\infty$，便得

$$\sum_{i=1}^{\infty}m^*E_i\leqslant m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right).$$

而外测度基本性质(iii)说 $m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*E_i$. 所以必然得出这样一个结论：如果基本性质(iv)中的条件 $\rho(A, B)>0$ 能放宽为 $A\cap B=\varnothing$，则外测度必具有“完全可加性”，即对任意一串互不相交的点集 $E_1,E_2,\cdots,E_n,\cdots$ 都有

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m^*E_n.$$

现在我们就一维空间的情形来说明这是不可能的.（从而也就可以推知在二维以上的空间中也是不可能的. 参见习题的第 2 题）.

对于(0,1)开区间上任意的点 x，作点集

$$R_x=\{\xi;0<\xi<1,\xi-x\text{ 为有理数}\}.$$

由于 $x\in R_x$，所以 R_x 显然是非空的，而且对于 $x,\ y\in(0,1)$，如果

$R_x \neq R_y$，则必有 $R_x \cap R_y = \varnothing$. 事实上，如果有 $\eta \in R_x \cap R_y$，则 $0 < \eta < 1$，$\eta - x$ 和 $\eta - y$ 同时为有理数. 于是对于任意 $\xi \in R_x$，

$$\xi - y = (\xi - x) + (x - \eta) + (\eta - y)$$

也一定是有理数，可见 $R_x \subset R_y$. 同理 $R_y \subset R_x$. 所以 $R_x = R_y$.

这样，$(0,1)$就分解成了一些互不相交的这样的 R_x 的并. 我们从每一个这样的R_x中取出一点构成一个集合$\hat{S}$，当然$\hat{S} \subset (0,1)$.

现在将$(-1,1)$内全体有理数排成序列：

$$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots.$$

用 $\hat{S}_n$ 表示 $\hat{S}$ 经过平移 r_n 后而得到的点集，即

$$\hat{S}_n = \{t: t = s + r_n, s \in \hat{S}\},$$

则 $\hat{S}_n \subset (-1, 2)$而且当 $n \neq m$ 时，$\hat{S}_n \cap \hat{S}_m = \varnothing$. 因为如果有某一 $t \in \hat{S}_n \cap \hat{S}_m$，则必有 $\hat{S}$ 中的点 s_1, s_2 使

$$t = s_1 + r_n, \quad t = s_2 + r_m.$$

于是 $s_1 - s_2 = r_m - r_n$ 是一不等于零的有理数. 如果 s_1 是从某一 R_x 中取来的，则 $s_1 - x$ 是有理数，这时 $s_2 - x = (s_2 - s_1) + (s_1 - x)$也就是一有理数，即 s_2 也应属于 R_x. 从而在 $\hat{S}$ 中有两个不同的点 s_1 和 s_2 是从同一个 R_x 取出来的，和 $\hat{S}$ 的定义相冲突.

我们再证明$(0, 1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{S}_n$. 设 $x \in (0,1)$而在组成 $\hat{S}$ 时从 R_x 中取出的点是 τ，则 $\tau - x$ 是有理数，$-1 < \tau - x < 1$，因此有某一m，使 $r_m = x - \tau$. 从而 $x = \tau + r_m \in \hat{S}_m$. 所以$(0,1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{S}_n$.

如果外测度是完全可加的，则

$$1 = m^*(0,1) \leqslant m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{S}_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^* \hat{S}_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^*\hat{S}_n = m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\hat{S}_n\right) \leqslant m^*(-1,\ 2) = 3.$$

即应有 $1 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^*\hat{S}_n \leqslant 3$. 注意 $\hat{S}_n$ 是 $\hat{S}$ 经平移而来的，因此

$$m^*\hat{S}_n = m^*\hat{S},\ n = 1, 2, 3\cdots.$$

要 $1 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^*\hat{S}_n \leqslant 3$ 是不可能的，因为如果 $m^*\hat{S} = 0$，左一不等式不成立；如果 $m^*\hat{S} > 0$，右一不等式又不能成立.

总结以上的讨论，我们已说明基本性质 (iv) 中的条件 $\rho(A, B) > 0$ 是不能放宽为 $A \cap B = \varnothing$ 的.

两个不相交的点集的并的外测度可能不等于两个集合的外测度的和. 这和我们在处理实际问题时的经验相违背. 那么是不是可以"改善"外测度的定义来克服这个问题呢？这是不可能的，不论你用什么方法定义点集的测度，只要它是"体积"概念的推广（即区间的测度就是它的体积、具有平移不变性和相当于外测度的基本性质(i)—(iii) 的性质），就不可能对任意不相交的点集具有可加性. 因为上述论证中矛盾的导出完全没有用到具体定义外测度的方法，而只用到了上述这些原则上不可不具备的性质. 我们现在所遇到的困难，不是由于定义外测度的方法有缺点，而是一种实质性的困难.

鉴于不相交的点集的测度要等于各点集的测度的和这一要求，在应用测度概念来处理问题时的不可缺少. 我们只好把某些特别"奇异"的点集称为不可测集合，使在余下的所谓可测集合的范围内，只要两集合不相交，并的测度就等于测度的和.

根据什么标准来划分点集为可测的与不可测的呢？当然应针对基本性质(iv)来说. 首先，如果 E 是可测的，那么 E 和 $E^c = \mathbf{R}^n$

$-E$ 的测度应该可以相加. 不过 $E\cup E^c=\mathbb{R}^n$, m^*E 和 m^*E^c 中至少有一个是 $+\infty$,所以

$$m^*(E\cup E^c)=m^*E+m^*E^c$$

对任何点集 E 都成立. ($+\infty=+\infty$!) 因此我们把条件加强为要求: 如果 E 可测,则 E 和它的余集 E^c 落在任何开区间 I 内的部分的测度可以相加,即 $m^*(I\cap E)+m^*(I\cap E^c)$ 应等于 $(I\cap E)\cup(I\cap E^c)=I$ 的测度 m^*I. 也就是要求对区间 I 有

$$m^*I=m^*(I\cap E)+m^*(I\cap E^c).$$

现在假设 $T\subset\mathbb{R}^n$ 是任意的一个集合, $\varepsilon>0$. 由外测度的定义,有开区间序列 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使 $\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\supset T$, $\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\leqslant m^*T+\varepsilon$.

注意

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right)\cap E\supset T\cap E,\ \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right)\cap E^c\supset T\cap E^c.$$

所以

$$\begin{aligned}
&m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)\leqslant\\
&\quad m^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right)\cap E\right)+m^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right)\cap E^c\right)\\
&=m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(I_n\cap E)\right)+m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(I_n\cap E^c)\right)\\
&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m^*(I_n\cap E)+\sum_{n=1}^{\infty}m^*(I_n\cap E^c)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}[m^*(I_n\cap E)+m^*(I_n\cap E^c)]
\end{aligned}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}m^*I_n\leqslant m^*T+\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$ 任意，$m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)\leqslant m^*T$. 可是从基本性质(iii)，$m^*T\leqslant m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$总是成立的. 因此这时对任意的 $T\subset\mathbf{R}^n$ 也都有

$$m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c).$$

定义 称 n-维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的点集 E 为**可测的**，如果对于任意 $T\subset\mathbf{R}^n$，都有

$$m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c). \tag{1}$$

可测集合 E 的外测度就称为它的(Lebesgue)**测度**，简记为 mE.

上述定义中的等式(1)通常称为 Carathéodory 条件. 显然这一条件也可以叙述成：对任意的 $A\subset E$ 和任意的 $B\subset E^c$，都有

$$m^*(A\cup B)=m^*A+m^*B. \tag{2}$$

事实上，如 E 可测，$A\subset E$，$B\subset E^c$，则只要取 $T=A\cup B$ 便可从(1)得(2). 反之如 E 满足(2)，$T\subset\mathbf{R}^n$ 任意给定，那么 $T\cap E\subset E$，$T\cap E^c\subset E^c$，因此只要在(2)中取 $A=T\cap E$，$B=T\cap E^c$ 便可得(1).

从定义中 E 和 E^c 所处地位的对称性及当 $m^*E=0$ 时，(1)式必然成立(因为此时对任意 T，$m^*(T\cap E)=0$，所以 $m^*T\geqslant m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$)，我们有

定理 1 E 可测的充要条件是 E^c 可测. 如果 $m^*E=0$，则 E 是可测的. 特别是 $\varnothing$ 和 $\mathbf{R}^n$ 都是可测的.

定理 2 若 S_1,S_2 都可测，则 $S_1\cup S_2$，$S_1\cap S_2$ 也可测.

证明 由De Morgan公式及定理 1，我们只要证明 $S_1\cup S_2$ 可测就行了.

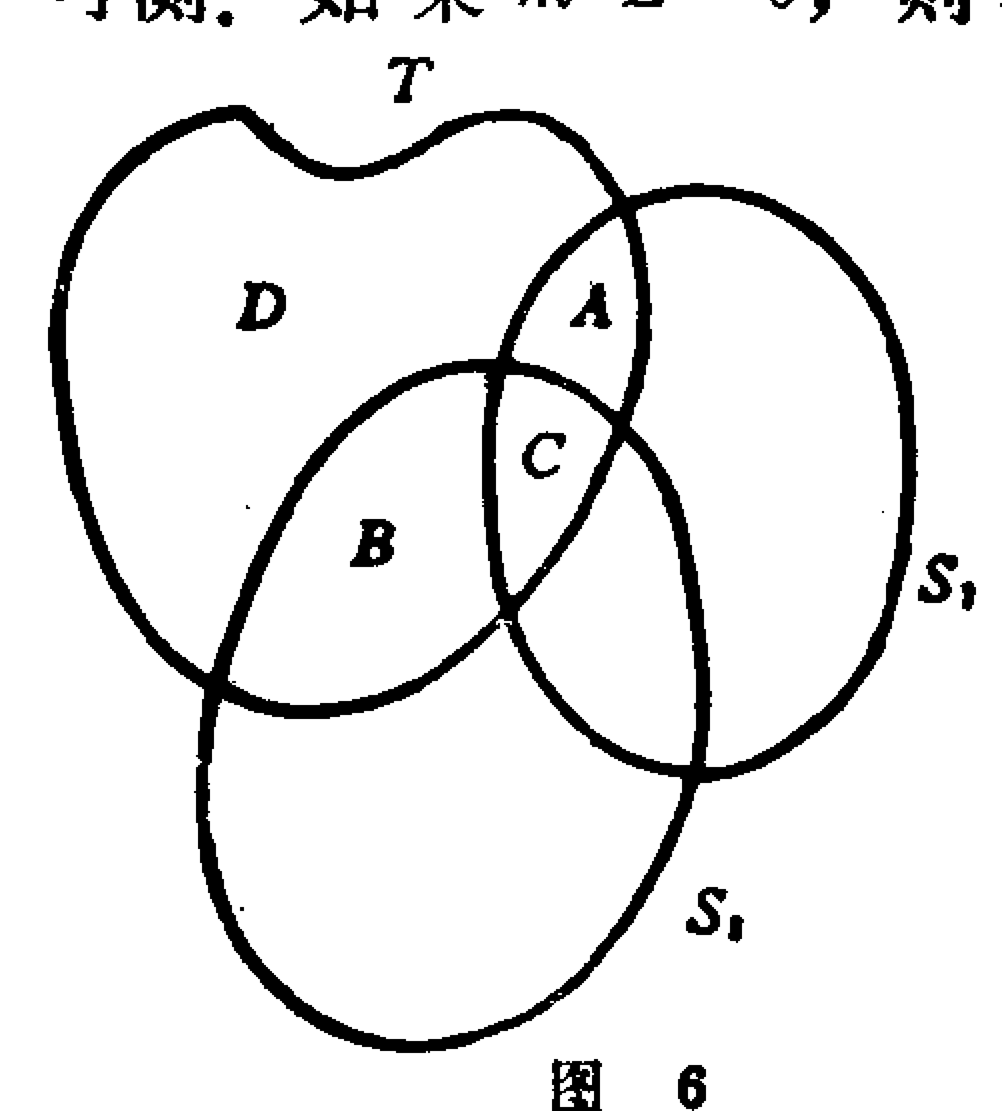


图 6

显然任意 $T\subset\mathbb{R}^n$ 均可分解为

$$T=(T\cap S_1-S_2)\cup(T\cap S_2-S_1)\cup(T\cap S_1\cap S_2)\cup(T-S_1-S_2)$$

$$\triangleq A\cup B\cup C\cup D(\text{图 }6).$$

因 $A\cup C\subset S_1, D\cup B\subset S_1^c$, S_1 可测,所以

$$m^*(A\cup C)+m^*(D\cup B)=m^*T.$$

同理

$$m^*B+m^*(A\cup C)=m^*(A\cup B\cup C),$$

又因 S_2 可测,所以

$$m^*(D\cup B)=m^*B+m^*D,$$

联合以上三式即得

$$\begin{aligned}m^*T&=m^*(A\cup B\cup C)+m^*D\\&=m^*[T\cap(S_1\cup S_2)]+m^*(T\cap(S_1\cup S_2)^c).\end{aligned}$$

所以 $S_1\cup S_2$ 可测.

推论 1 若 S_1,S_2 可测,则 S_1-S_2 可测.

证明 因为 $S_1-S_2=S_1\cap S_2^c$.

推论 2 若 S_i, $i=1,2,\cdots,m$, 都是可测的,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}S_i$ 也是可测的,并且当这些 S_i 互不相交时,对任意 $T\subset\mathbb{R}^n$ 都有

$$m^*\left(T\cap\bigcup_{i=1}^{m}S_i\right)=\sum_{i=1}^{m}m^*(T\cap S_i).$$

证明 显然只要证明后一结论. 当 $m=1$ 时,结论当然是对的. 现设 $m=k$ 时结论成立,往证 $m=k+1$ 时结论仍成立. 设 $T\subset\mathbb{R}^n$ 已取定. 由于诸 S_i 互不相交,所以

$$A\triangleq T\cap S_{k+1}\subset S_{k+1},\ B\triangleq T\cap\bigcup_{i=1}^{k}S_i=\bigcup_{i=1}^{k}(T\cap S_i)\subset S_{k+1}^c,$$

而 S_{k+1} 可测，所以

$$m^*\left(\left(T\cap\bigcup_{i=1}^{k}S_i\right)\cup(T\cap S_{k+1})\right)=m^*(A\cup B)$$

$$=m^*A+m^*B=m^*(T\cap S_{k+1})+m^*\left(\bigcup_{i=1}^{k}(T\cap S_i)\right).$$

而已设 $n=k$ 时结论成立，故 $m^*\left(\bigcup_{i=1}^{k}(T\cap S_i)\right)=\sum_{i=1}^{k}m^*(T\cap S_i)$，于是

$$m^*\left(T\cap\bigcup_{i=1}^{k+1}S_i\right)=m^*\left(\bigcup_{i=1}^{k+1}(T\cap S_i)\right)=\sum_{i=1}^{k+1}m^*(T\cap S_i).$$

即结论在 $m=k+1$ 时仍成立. 根据数学归纳法，结论应对一切 m 都成立. 证完.

定理 3 若 S_i 都是可测集合，$i=1,2,\cdots$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i$ 也是可测集合. 如果诸 S_i 还是互不相交的，则对于任意 $T\subset\mathbb{R}^n$ 都有

$$m^*\left(T\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i\right)=m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(T\cap S_i)\right)=\sum_{i=1}^{\infty}m^*(T\cap S_i).$$

证明 由于

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i=S_1\cup(S_2-S_1)\cup(S_3-S_1-S_2)\cup\cdots,$$

上式右端各项都是可测的而且互不相交，因此只需就 S_i 互不相交的情形证明即可. 以下即假设诸 S_i 互不相交.

我们先证 $\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i$ 的可测性，用 S 记 $\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i$. 对于任意的 $T\subset\mathbf{R}^n$. 从 $T=(T\cap S)\cup(T\cap S^c)$ 知 $m^*T\leqslant m^*(T\cap S)+m^*(T\cap S^c)$ 总是

成立的．我们只要证明现在还有

$$m^*(T\cap S)+m^*(T\cap S^c)\leqslant m^*T$$

即可．由于

$$m^*(T\cap S)=m^*\left(T\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i\right)=m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(T\cap S_i)\right)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*(T\cap S_i),$$

我们又只需证明

$$\sum_{i=1}^{\infty}m^*(T\cap S_i)+m^*(T\cap S^c)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}m^*(T\cap S_i)+m^*\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}(T\cap S_i^c)\right)\leqslant m^*T. \tag{3}$$

任意取定 n，由推论 2，$\bigcup_{i=1}^{n}S_i$ 可测而且

$$\sum_{i=1}^{n}m^*(T\cap S_i)=m^*\left(T\cap\bigcup_{i=1}^{n}S_i\right),$$

所以

$$m^*T=m^*\left(T\cap\bigcup_{i=1}^{n}S_i\right)+m^*\left(T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}S_i\right)^c\right)$$

$$=m^*\left(T\cap\bigcup_{i=1}^{n}S_i\right)+m^*\left(\bigcap_{i=1}^{n}(T\cap S_i^c)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}m^*(T\cap S_i)+m^*\left(\bigcap_{i=1}^{n}(T\cap S_i^c)\right)$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{n}m^*(T\cap S_i)+m^*\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}(T\cap S_i^c)\right).$$

现在令 $n\to\infty$ 便得到(3)式．所以 $\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i$ 是可测的．

对于任意给定了的 $T\subset \mathbb{R}^n$，取 $T\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$ 作为(3) 式中的 T，则(3)式成为

$$\sum_{i=1}^{\infty}m^*\left(\left(T\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n\right)\cap S_i\right)+m^*\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\left(T\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n\right)\cap S_i^c\right)\right)$$

$$\leqslant m^*\left(T\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n\right)$$

注意 $S_i\cap S_j=\varnothing\,(i\neq j)$，所以

$$\left(T\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n\right)\cap S_i=T\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}(S_n\cap S_i)=T\cap S_i,$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\left(T\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n\right)\cap S_i^c\right)=\left(T\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n\right)\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i\right)^c=\varnothing.$$

于是上式即

$$\sum_{i=1}^{\infty}m^*(T\cap S_i)\leqslant m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(T\cap S_i)\right).$$

但外测度基本性质(iii)说

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(T\cap S_i)\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*(T\cap S_i),$$

所以最终得

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(T\cap S_i)\right)=\sum_{i=1}^{\infty}m^*(T\cap S_i).$$

证完.

如果我们将定理 3 中的 T 取为整个 n-维空间 $\mathbb{R}^n$，则知当 S_ν 是一些互不相交的可测集合时，

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty} mS_k.$$

可见对于可测集合来说，测度确实是完全可加的.

定理 4 如果诸 $S_i, i=1,2,3,\cdots$，都是可测的，则 $\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i$ 也是可测的.

证明 因为$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i\right)^c=\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i^c$，由定理 1 及定理 3 知，$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i^c$ 是可测的，从而再引用定理 1 即知 $\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i$ 可测.

如果我们用 $\mathfrak{M}$ 表示 n-维空间 $\mathbf{R}^n$ 中全体可测集所作成的集合类，则从定理 1，定理 2 和定理 3 知 $\mathfrak{M}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的子集的一个 σ-域. 而 mE 便是一个定义于 $\mathfrak{M}$ 上的取广义实数值（即可取 $+\infty$ 为值的）非负集合函数①，$m\varnothing=0$ 而且在 $\mathfrak{M}$ 上还是完全可加的.

以下我们讨论“单调”的可测集合序列.

定理 5 设

(1) $E_i, i=1,2,3,\cdots$，都是可测集合，

(2) $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_i\subset\cdots$，

(3) $S=\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$，

则对任意 $T\subset\mathbf{R}^n$ 都有

$$m^*(T\cap S)=\lim_{k\to\infty} m^*(T\cap E_k).$$

特别是我们有 $mS=\lim_{k\to\infty} mS_k$.

---

① 即自变量是集合的函数.

证明 令 $E_0=\varnothing, S_i=E_i-E_{i-1}, i=1,2,3,\cdots$，则诸 S_i 都是可测的且互不相交．又

$$S=\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i,\ E_k=\bigcup_{i=1}^{k}S_i.$$

从而由定理 3 和推论 2 便得

$$m^*(T\cap S)=\sum_{i=1}^{\infty}m^*(T\cap S_i)=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}m^*(T\cap S_i)$$

$$=\lim_{k\to\infty}m^*\left(T\cap\bigcup_{i=1}^{k}S_i\right)=\lim_{k\to\infty}m^*(T\cap E_k).$$

定理 6 设

(1) $E_i, i=1,2,3,\cdots$，都是可测集合，

(2) $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_i\supset\cdots$

(3) $E=\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i$，

则对任意使 $m^*T<+\infty$ 的 T，都有

$$m^*(T\cap E)=\lim_{k\to\infty}m^*(T\cap E_k).$$

证明 由定理 4，E 是可测集合，又由于 E_k 可测，对于任意 $T\subset\mathbf{R}^n$，

$$m^*T=m^*(T\cap E_k)+m^*(T\cap E_k^c).$$

(注意 $m^*T<+\infty$ 条件尚未用到)．而如果 $m^*T<+\infty$，则上式便可写成

$$m^*(T\cap E_k)=m^*T-m^*(T\cap E_k^c).$$

于是由定理 5 便得

$$\lim_{k\to\infty}m^*(T\cap E_k)=m^*T-\lim_{k\to\infty}m^*(T\cap E_k^c)$$

$$=m^*T-m^*(T\cap E^c)=m^*(T\cap E).$$

证完.

作为本节的结束，我们要指出在本节开始时所作出的那个集合 $\hat{S}$ 是一维空间 R^1 中的一个不可测集合. 因为如果 $\hat{S}$ 可测，则所有的 $\hat{S}_n$ 也都可测，而诸 $\hat{S}_n$ 互不相交，由测度的完全可加性便应有

$$m\left(\bigcup_{n=1}\hat{S}_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m\hat{S}_n=\sum_{n=1}^{\infty}m\hat{S}$$

而这正是当时导致矛盾的关键所在.

习　题

1. 举例说明两个不可测集合的并、交、差既可以是不可测集合也可以是可测集合.

2. 试在二维空间 R^2 中作出一不可测集合来.

3. 举例说明定理 6 的结果对使 $m^*T=+\infty$ 的 T 可以不成立.

4. 证明对任意可测集合 A 和 B 都有

$$m(A\cup B)+m(A\cap B)=mA+mB.$$

5. 证明对于任意 $E\subset R^n$ 及任意 $\varepsilon>0$，都有 R^n 中的开集 G，使 $G\supset E$ 且

$$m^*G\leqslant m^*E+\varepsilon.$$

6. 证明对于 R^n 中的任何可测集合序列 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$，都有

$$m(\liminf_k E_k)\leqslant\liminf_k m(E_k).$$

而如果有 k_0 使 $m\left(\bigcup_{k=k_0}^{\infty}E_k\right)<+\infty$，则还有

$$m(\limsup_k E_k)\geqslant\limsup_k m(E_k).$$

7. 设 E 是 R^n 中的可测集合，$mE<+\infty$. 证明如果 E 的可测子集的序列 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使 $\sum_{k=1}^{\infty}mE_k<+\infty$，则 $m(\limsup_k E_k)=0$.

§3 开集的可测性

在前一节中，我们定义了什么是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集合，讨论了可测集合的一些性质而且证明了全体可测子集所作成的集合类就是 $\mathbf{R}^n$ 的子集的一个 σ-域．但是那些常见的集合是否可测？本节我们就来讨论这个问题．

定理 1 $\mathbf{R}^n$ 中任何开区间 I 都是可测的并且 $mI=|I|$．

证明 设

$$I=\{x=(x_1,\cdots,x_n);c_i<x_i<d_i,i=1,2,\cdots,n\};$$

显然对任意 $T\subset\mathbf{R}^n$，恒有

$$m^*T\leqslant m^*(T\cap I)+m^*(T\cap I^c),$$

所以要证明 I 可测(图 7)，只要证明

$$m^*T\geqslant m^*(T\cap I)+m^*(T\cap I^c)\qquad(1)$$

即可．令

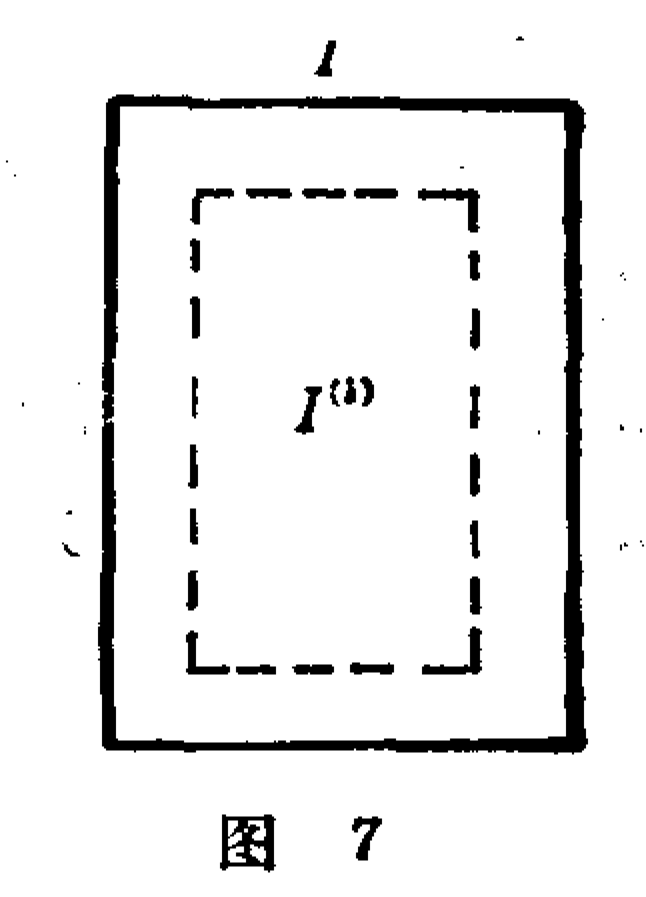


图 7

$$I^{(k)}=\{x=(x_1,\cdots,x_n);\ c_i+\frac{1}{k}<x_i<d_i-\frac{1}{k},i=1,\cdots,\ n\},$$

则当 k 充分大时，$I^{(k)}\neq\varnothing$，$\rho(I^{(k)},I^c)=\frac{1}{k}>0$．从而

$$\rho(I^{(k)}\cap T,I^c\cap T)>0.$$

于是由外测度的基本性质(IV)，

$$m^*T\geqslant m^*((I^{(k)}\cup I^c)\cap T)=m^*(I^{(k)}\cap T)+m^*(I^c\cap T),$$

可见如果我们能证明

$$\lim_{k\to\infty}m^*(I^{(k)}\cap T)=m^*(I\cap T),$$

则(1)式即已得证．但是 $I-I^{(k)}$ 的外测度显然是随 $k\to\infty$ 而趋于零的，而且

$$0\leqslant m^*(I\cap T)-m^*(I^{(k)}\cap T)\leqslant m^*((I-I^{(k)})\cap T)$$

$$\leqslant m^*(I-I^{(k)}),$$

所以$\lim\limits_{k\to\infty} m^*(I^{(k)}\cap T)=m^*(I\cap T)$确实是成立的．于是$I$可测．至于$mI=|I|$，我们已在§1中就$n=1$的情形证明过，$n>1$的情形的证明是类似的．证完．

由于n维空间$\mathbf{R}^n$中任何区间和相应的开区间只差一个测度为零的点集，所以我们实际上已证明$\mathbf{R}^n$中任意的区间都是可测的．

引理 $\mathbf{R}^n$中的非空开集G都可以表成可数多个互不相交的左开右闭的区间的并．即$G=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} J_i$，

$$J_i=\{(x_1,\cdots,x_n);c_j^{(i)}<x_j\leqslant d_j^{(i)},j=1,\cdots,n\},$$

且$J_i\cap J_j=\varnothing(i\neq j)$．

证明 对每一正整数k，$\mathbf{R}^n$都可分解成可数多个形如

$$\left\{(x_1,\cdots,x_n);\ \frac{m_i}{2^k}<x_i\leqslant\frac{m_i+1}{2^k},i=1,\cdots,n\right\}\quad(m_i\text{ 为整数})(*)$$

的互不相交的左开右闭区间．设$k=1$时上述这些区间中完全包含在G内的那些是$I_1^{(1)},I_2^{(1)}$，…(有限个或可数多个)．对于$k>1$，用$I_1^{(k)}$，$I_2^{(k)}$，…表示上述那些区间中完全被G包含，但不被任何$I_i^{(l)}(l\leqslant k-1)$包含的区间(有限个或可数多个)．这样我们就得到可数多个左开右闭的区间$I_j^{(k)},1\leqslant j<t_k\leqslant+\infty,k=1,2,\cdots$．显然它们是互不相交的，$\bigcup\limits_{k,j} I_j^{(k)}\subset G$．若$x\in G$，因$G$为开集，有$\delta>0$，使以$x$为心，$\delta$为半径的邻域$N(x,\delta)\subset G$．于是当$k$充分大时，(*)式中那些区间中包含$x$的那个必全包含在$G$内，从而$x\in\bigcup\limits_{k,j} I_j^{(k)}$．

总之$G=\bigcup\limits_{k,j} I_j^{(k)}$．

定理 2 $\mathbf{R}^n$ 中的开集、闭集以及任何 Borel 集都是可测的.

证明 因我们已知 $\mathbf{R}^n$ 中任何区间都是可测的. 结合上述引理,便知 $\mathbf{R}^n$ 中的开集都可测,从而闭集也都可测, 我们又已知 $\mathbf{R}^n$ 中全体可测集合的类 $\mathfrak{M}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的子集的一 σ-域, 它既包含了全体开集, 自然就应包含由开集产生的 σ-域, 即 $\mathbf{R}^n$ 中的 Borel 集类. 所以任何 Borel 集都是可测的.

既然凡 Borel 集都可测, 我们在 §2中作出的不可测集合当然不是 Borel 集,这使我们见到了不是 Borel 集的点集. 那么有没有不是 Borel 集的可测点集呢? 这也是有的①.

在这里我们还要着重指出一点, 那就是在证明定理 1 时我们首次用到了外测度的基本性质(iv),在证明开集的可测性时,还进一步引用了欧氏空间的特性(即用到了上述引理). 其实只要有了基本性质(i)—(iv), 并不引用欧氏空间的特性也是同样可以证明开集的可测性的②.

下述的几个定理不仅进一步说明了 Borel 集合与可测集合的关系,而且也是很有用的结论.

定理 3 对于任意 $E\subset\mathbf{R}^n$,都有 $\mathbf{R}^n$ 中的 G_δ 型集合 G,使 $G\supset E$ 且 $mG=m^*E$.

证明 由外测度定义,对于任意正整数 n, 都可取一串开区间 $I_i^{(n)}, i=1,2,3,\cdots$, 使

$$E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i^{(n)},\ \sum_{i=1}^{\infty}|I_i^{(n)}|\leqslant m^*E+\frac{1}{n}.$$

令 $G_n=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i^{(n)}$,则 G_n 是开集,于是 $G=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$ 是一 G_δ 型集. 显然

① 周民强,《实变函数》,北京大学出版社,1985,第 87 页上就有这样的例子.

② 江泽坚,《实变函数》,高等教育出版社,1959,第 149—150 页.

$G\supset E$. 又

$$m^*E\leqslant mG\leqslant mG_n\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|I_i^{(n)}|\leqslant m^*E+\frac{1}{n}.$$

所以 $mG=m^*E$. 证完.

从上述证明过程我们还可看出，如果G包含在开区间I内，则还可以要求诸 G_n 也都包含在 I 内.

定理 4 若 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是可测的，则有 $\mathbf{R}^n$ 中的 F_σ 型集 F，使 $F\subset E$ 且 $mF=mE, m(E-F)=0$.

证明 因为任何无界的可测集合都可分解为可数多个互不相交的有界可测集合的并，而测度是完全可加的，F_σ 型集的可数并仍然是 F_σ 集，所以不妨设E是有界的. 令 $\bar{I}$ 为一包含E的闭区间，$S=\bar{I}-E$. 由定理 3，有 G_δ 型集合 $G\supset S$，使 $mG=mS$. 令 $F=\bar{I}\cap G^c$，则F是 F_σ 型集，$F\subset E$. 而且

$$mF=m(\bar{I}\cap G^c)\geqslant m\bar{I}-mG=m\bar{I}-mS$$
$$=m\bar{I}-(m\bar{I}-mE)=mE.$$

$m(E-F)=mE-mF=0$，证完.

推论 如果E是一可测集，则有一 Borel 集(F_σ 型集)F 及一测度为零的点集 N，使

$$E=F\cup N.$$

证明 从定理 4 即得.

定理 4 的推论说明 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集类 $\mathfrak{M}$，其实就是由全体 Borel 集合和全体测度为零的集合所构成的集合类所产生的 σ-域，或者说由全体开集和全体测度为零的点集所构成的类所产生的 σ-域.

习　题

1. 证明 Cantor 集合的测度为零，并在$[0,1]$上作一测度大于零的无处稠密的完备集. 进而证明存在开集G，使$m\bar{G}>mG$.

2. 证明：只要E可测，$\varepsilon>0$，就有开集$G\supset E$，闭集$F\subset E$，使$m(G-E)<\varepsilon$，$m(E-F)<\varepsilon$.

3. 证明有界集合E可测的充要条件是

$$\inf\{mG;\ G \text{ 为开集}, G\supset E\}=\sup\{mF;\ F \text{ 为闭集}, F\subset E\}.$$

4. 证明有界集合E可测的充要条件是对任意$\varepsilon>0$，都有可测集合E_1，E_2使$E_1\subset E\subset E_2$，$m(E_2-E_1)<\varepsilon$.

5. 证明对于$\mathbf{R}^n$中任意一串点集E_n，$n=1,2,\cdots$，只要$E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$，便有

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\lim_{n\to\infty}m^*E_n.$$

6. 证明：如果E是$\mathbf{R}^n$中的可测点集，$\alpha>0$，则

$$\alpha E\triangleq\{(\alpha x_1,\cdots,\alpha x_n);(x_1,\cdots,x_n)\in E\}$$

也是可测的，并且$m(\alpha E)=\alpha^n mE$.

7. 证明：如已知开集都是可测的，则从外测度的基本性质(i)，(ii)，(iii)可推出基本性质(iv). 这说明什么？

8. 证明$\overline{\overline{\mathfrak{M}}}=2^c$. 即$\mathbf{R}^n$中全体可测子集的类$\mathfrak{M}$和$\mathbf{R}^n$中全体子集的基数相同.

9. 证明对于任何闭集F，都可作一完备集$F_1\subset F$，使$mF_1=mF$.（提示：考虑$E=\{x;x\in F$，有$\delta>0$，使$N(x,\delta)$中至多有可数多个点属于F. 证明$mE=0$.）

10. 设A,B是$\mathbf{R}^1$中两个有界闭集. $x_0,y_0\in\mathbf{R}^1$，$A_1=A\cap(-\infty,x_0]$，$A_2=A\cap[x_0,+\infty)$，$B_1=B\cap(-\infty,y_0]$，$B_2=B\cap[y_0,+\infty)$，证明$m(A\dotplus B)\geqslant m(A_1\dotplus B_1)+m(A_2\dotplus B_2)$，此处“$\dotplus$”表示两个点集的向量和.（参考第二章§2习题的第14题.）

11. 证明：如果A和B都是$\mathbf{R}^1$中有限多个相互没有公共内点的有界闭区间的并，则$m(A\dotplus B)\geqslant mA+mB$.（提示：对区间的个数用数学归纳法并注意从上题知

$$m(A\dotplus B)-m(A)-m(B)\geqslant[m(A_1\dotplus B_1)-m(A_1)-m(B_1)]$$
$$+[m(A_2\dotplus B_2)-m(A_2)-m(B_2)]).$$

12. 设 A,B 都是 $\mathbf{R}^1$ 中的有界闭集. 证明对 $0<\lambda<1$ 有①

$$m(\lambda A\dotplus(1-\lambda)B)\geqslant\lambda m(A)+(1-\lambda)m(B).$$

(记号的意义见习题 6 及上题. 提示: 先证明任何有界闭集都可表成一串下降的上题中所说的那种集合的交.)

§4 乘积空间

设 A,B 是任意两个集合,我们称集合

$$\{(x,y);x\in A,y\in B\}$$

为 A 和 B 的**笛卡儿乘积**. 记作 $A\times B$. 例如 A 和 B 都是数直线上的开区间 $(0,1)$ 时, $A\times B$ 就是平面上的开单位正方形

$$I=\{(x,y);0<x<1,0<y<1\}.$$

而如果 A 是 p-维空间 $\mathbf{R}^p$, B 是 q-维空间 $\mathbf{R}^q$, 则 $A\times B$ 就是 $(p+q)$-维空间 $\mathbf{R}^{p+q}$.

根据前几节的讨论, 不论是在 $\mathbf{R}^p$ 还是在 $\mathbf{R}^q$ 或 $\mathbf{R}^{p+q}$ 中都已定义了点集的可测性. 一个很重要的问题是 $\mathbf{R}^{p+q}$ 中的可测集合和 $\mathbf{R}^p$, $\mathbf{R}^q$ 之中的可测集合之间有什么关系? 又 $\mathbf{R}^{p+q}$ 中可测集合的测度和 $\mathbf{R}^p$, $\mathbf{R}^q$ 中的可测集合的测度之间又有什么关系? 下面的几个定理给出了第一个问题的回答, 同时也部分地回答了第二个问题. 至于第二个问题的完满的回答,则要等到第五章 §4才能给出.

定理 1 如果 A 和 B 分别是 $\mathbf{R}^p$ 和 $\mathbf{R}^q$ 中的可测集, 则 $C=A\times B$ 是 $\mathbf{R}^{p+q}$ 中的可测集, 并且 $mC=mA\cdot mB$. 此处当 mA,mB 中有一个为零时,不论另一个是否有限, $mA\cdot mB$ 都理解为零.

---

① 这一不等式称为 Brunn-Minkowski 不等式. 它在 $\mathbf{R}^n$ 中的形式是

$$[m(\lambda A\dotplus(1-\lambda)B)]^{1/n}\geqslant\lambda(mA)^{\frac{1}{n}}+(1-\lambda)(mB)^{\frac{1}{n}}.$$

证明 先讨论 A, B 都有界的情形，这时又分以下几个步骤.

1° 当 A, B 都是区间时，$A\times B$ 是 $\mathbf{R}^{p+q}$ 中的区间. 所以结论是显然成立的.

2° 若 A, B 都是开集，由前节的引理，我们可将 A 和 B 表成可数多个互不相交的区间的并：

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,\ B=\bigcup_{j=1}^{\infty} J_j,$$

于是

$$C=A\times B=\bigcup_{i,j=1}^{\infty}(I_i\times J_j),$$

并且诸 $I_i\times J_j$ 还是互不相交的. 于是 C 可测，

$$mC=\sum_{i,j=1}^{\infty} m(I_i\times J_j)=\sum_{i,j=1}^{\infty} mI_i\cdot mJ_j$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty} mI_i\cdot\sum_{j=1}^{\infty} mJ_j=mA\cdot mB.$$

3° 如果 A, B 都是有界的 G_δ 集合，则有 $\mathbf{R}^p$ 和 $\mathbf{R}^q$ 中的有界开集的下降序列 $\{G'_n\}$ 和 $\{G''_n\}$ 使

$$A=\bigcap_{n=1}^{\infty} G'_n,\ B=\bigcap_{n=1}^{\infty} G''_n.$$

于是

$$A\times B=\bigcap_{n=1}^{\infty}(G'_n\times G''_n).$$

由前段的证明，$G'_n\times G''_n$ 是 $\mathbf{R}^{p+q}$ 中的可测集，

$$m(G'_n\times G''_n)=mG'_n\cdot mG''_n<+\infty,$$

又 $G'_n\times G''_n$ 还是下降的，因此由 § 2定理 4 和 6 知 $A\times B$ 可测且

$$m(A\times B)=\lim_{n\to\infty}m(G_n'\times G_n'')=\lim_{n\to\infty}(mG_n'\cdot mG_n'')$$
$$=\lim_{n\to\infty}mG_n'\cdot\lim_{n\to\infty}mG_n''=mA\cdot mB.$$

4° 对有界的 A,B，若 mA 和 mB 中至少有一个为零，比如说 $mA=0$. 由 § 3 定理 4，分别有 $\mathbb{R}^p$ 和 $\mathbb{R}^q$ 中有界的 G_δ 型集 G',G'' 使 $G'\supset A, mG'=mA=0, G''\supset B, mG''=mB$. 注意 $A\times B\subset G'\times G''$ 和

$$m(G'\times G'')=mG'\cdot mG''=0.$$

即知 $m^*(A\times B)=0$，所以 $A\times B$ 可测且 $m(A\times B)=mA\cdot mB$.

5° 最后，对于一般的有界可测集 A 和 B，从 § 3定理 4，有 $\mathbb{R}^p$ 和 $\mathbb{R}^q$ 中的有界 G_δ 集 G' 和 G''，使

$$G'\supset A, mG'=mA,\quad G''\supset B, mG''=mB,$$

于是 $A^*=G'-A, B^*=G''-B$ 分别是 $\mathbb{R}^p$ 和 $\mathbb{R}^q$ 中的可测集且

$$G'=A^*\cup A, G''=B^*\cup B,\quad mA^*=0, mB^*=0.$$

$$G'\times G''=(A^*\times B^*)\cup(A^*\times B)\cup(A\times B^*)\cup(A\times B).$$

于是

$$A\times B=G'\times G''-A^*\times B^*-A^*\times B-A\times B^*,$$

从 3° 和 4° 上式右边的四个集合都是可测的，而且后边的三项的测度都是零. 因此 $A\times B$ 可测且

$$m(A\times B)=m(G'\times G'')=mG'\cdot mG''=mA\cdot mB.$$

这样对于有界可测的 A 和 B，定理的结论已得证.

至于 A,B 无界的情形. 注意总可以将 A,B 写成一些互不相交的有界可测集合的并：

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i,\quad B=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j.$$

于是

$$A\times B=\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\times\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j\right)$$
$$=\bigcup_{i,j=1}^{\infty}(A_i\times B_j)$$

而 $A_i\times B_j$ 可测 $m(A_i\times B_j)=mA_i\times mB_j$，所以 $A\times B$ 是可测的，并且

$$m(A\times B)=m\left(\bigcup_{i,j=1}^{\infty}A_i\times B_j\right)=\sum_{i,j=1}^{\infty}mA_i\cdot mB_j$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{\infty}mA_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}mB_j\right)$$
$$=mA\cdot mB.$$

定理证明至此全部完成.

我们约定，如果 $\pi(x)$ 是一个关于点集 E 上的 x 的命题，则当存在 E 中测度为零的子集 N 使在 E-N 上 $\pi(x)$ 恒成立时，便说 $\pi(x)$ **在 E 上几乎处处成立**，记为 $\pi(x)$a.e. 于 E. 比如我们可以说 $|\operatorname{tg}x|<+\infty$a.e. 于 $\mathbb{R}^1$，也可以说 Cantor 集合 C 的示性函数

$$\phi_C(x)=\begin{cases}1, & 当\ x\in C,\\ 0, & 当\ x\overline{\in}C\end{cases}$$

是在 $[0,1]$ 上几乎处处为零的.

定义 设 $E\subset\mathbb{R}^{p+q}$，对于 $x_0\in\mathbf{R}^p$，称 $\mathbf{R}^q$ 中点集

$$E_{x_0}=\{y;y\in\mathbf{R}^q,(x_0,y)\in E\},$$

为 E **在 x_0 处的截口**，或以超平面 $x=x_0$ 截 E 的截口.

例 如果 E 是 $\mathbb{R}^{p+q}$ 中的一区间，则 E_{x_0} 或为空集或为 $\mathbf{R}^q$ 中的一区间. 而如果 E 是平面上的单位开圆，则 E_{x_0} 当 $|x_0|\geqslant1$ 时为 $\varnothing$，当 $|x_0|<1$ 时为区间 $(-\sqrt{1-x_0^2},\ \sqrt{1-x_0^2})$.

定理 2 如果 $E\subset\mathbb{R}^{p+q}$ 的测度为零，则有 $\mathbb{R}^p$ 的测度为零的

子集 N，使当 $x\in\mathbb{R}^p-N$ 时，$mE_x=0$. 也就是说几乎对一切 $x\in\mathbb{R}^p$, E_x 都是 $\mathbf{R}^q$ 中的测度为零的可测子集.

证明 为简便计，以下我们就 $p=q=1$ 的情形给出证明，至于一般情形的证明是类似的. 另外易见还不妨假定 E 是有界的，由于

$$\{x;m^*E_x>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x;m^*E_x>\frac{1}{n}\right\}$$

我们只要证明对于任意 $d>0$, $Q\triangleq\{x,\ m^*E_x>d\}$ 的测度都是零就可以了.

对于任意 $\varepsilon>0$，我们可取 $\mathbf{R}^{1+1}=\mathbf{R}^2$ 中的开集 $G\supset E$，使 $mG<\varepsilon$. 由§3 的引理，G 可以表为可数多个互不相交的左开右闭区间的并：$G=\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$, $I_i=I_i^{(1)}\times I_i^{(2)}$, $I_i^{(1)}$, $I_i^{(2)}$ 都是 $\mathbb{R}^1$ 中的左开右闭区间. 令 $S_n=\bigcup_{i=1}^{n}I_i$，显然 $S_n\subset S_{n+1}$，$\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n=G$，所以对任意 $x\in\mathbb{R}^1$,

$$(S_n)_x\subset(S_{n+1})_x,\ n\geqslant1;\ \bigcup_{n=1}^{\infty}(S_n)_x=G_x.$$

由于 $(S_n)_x$ 或为空集或为有限个左开右闭区间的并（图 8)，因此总是可测集合，由§2 定理 3 和定理 5，G_x 也对一切 $x\in\mathbb{R}^1$ 都是 $\mathbb{R}^1$ 中的可测点集并且

$$mG_x=\lim_{n\to\infty}m(S_n)_x. \tag{1}$$

令 $P=\{x;m^*G_x>d\}$, $P_n=\{x;m(S_n)_x>d\}$, $n=1,2,3,\cdots$，则 $Q\subset P$ 并且从式(1)还可知

$$P=\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n,\quad P_n\subset P_{n+1}\quad (n\geqslant 1)\tag{2}$$

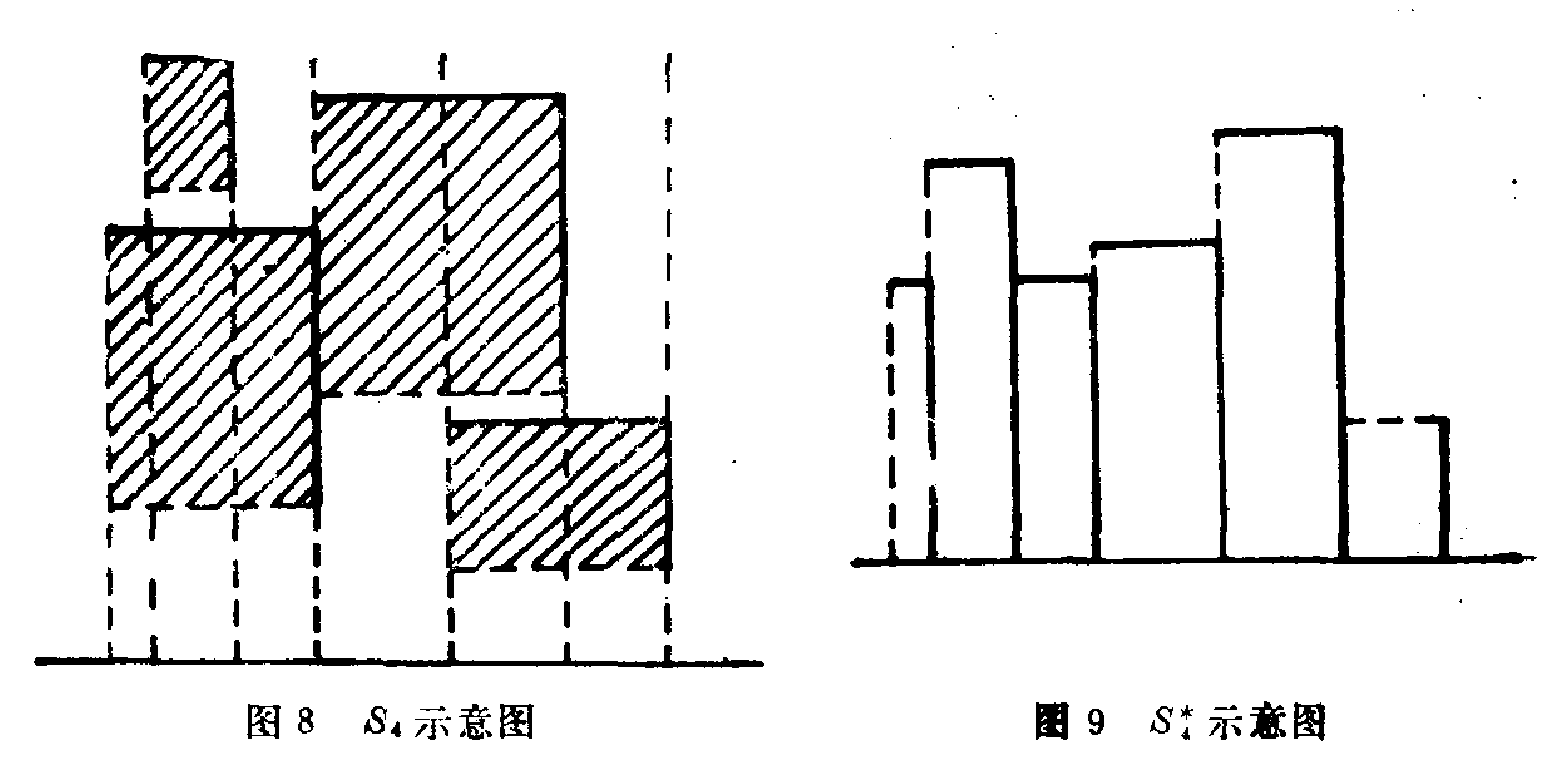


图 8　S_4 示意图　　　　图 9　S_4^* 示意图

对于固定的 n，用过 $I_1^{(1)},\cdots,I_n^{(1)}$ 的端点垂直于 x-轴的直线把 S_n 分解成为有限个新的互不相交的左开右闭区间 $I_1^*,\ \cdots,\ I_t^*$ 的并：$S_n=\bigcup_{k=1}^{t}I_k^*$. 同时也就将 $\bigcup_{i=1}^{n}I_i^{(1)}$ 分解为有限个互不相交的左开右闭区间 $J_1^{(1)},\cdots,\ J_l^{(1)}$ 的并 $\bigcup_{i=1}^{n}I_i^{(1)}=\bigcup_{j=1}^{l}J_j^{(1)}$. 当 x 在同一 $J_j^{(1)}$ 内变动时，$(S_n)_x$ 显然保持不变，因此 P_n 是有限个小左开右闭区间的并，从而是可测集，因而从(2)或即知 P 是可测的，且

$$mP=\lim_{n\to\infty}mP_n.\tag{3}$$

设 x 在 $J_j^{(1)}$ 上变时，$m(S_n)_x$ 的值为 r_j, $j=1,2,\cdots,l$. 作 $\mathbf{R}^2$ 中的点集

$$S_n^*=\bigcup_{j=1}^{l}J_j^{(1)}\times(0,r_j].$$

易见 S_n^* 可以通过将 $S_n=\bigcup_{k=1}^{t}I_k^*$ 中的各区间 I_k^* 作适当的上、下平

行移动和拼接而得到(图 9). 所以 $mS_n^*=mS_n$.

注意当区间 $J_j^{(1)}\subset P_n$ 时，$r_j>d$，所以

$$d\cdot mP_n=d\sum_{J_j^{(1)}\subset P_n}|J_j^{(1)}|\leqslant\sum_{J_j^{(1)}\subset P_n}|J_j^{(1)}|\cdot r_j\leqslant mS_n^*=mS_n$$

$$\leqslant mG<\varepsilon.$$

于是 $mP_n<\frac{\varepsilon}{d}$. 从(3)式便得

$$mP\leqslant\frac{\varepsilon}{d}.$$

注意 $\varepsilon>0$ 是任意的. $m^*Q\leqslant mP$，便知 $mQ=0$，证完.

定理 3 如果 E 是 R^{p+q} 中的可测集合，则几乎对于所有的 x，E_x 都是 R^q 中的可测集合.

证明 如果 E 是 R^{p+q} 中的开集，则对一切 x，E_x 都是 R^q 中的开集. 所以总是可测的. 如果 E 是 R^{p+q} 中的 G_δ 型集 $E=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$，$G_n$ 为开集，则因 $E_x=\bigcap_{n=1}^{\infty}(G_n)_x$，所以 E_x 也是对一切 $x\in\mathrm{R}^p$ 都可测的. 对于 R^{p+q} 中一般的可测集合 E，取 R^{p+q} 中的 G_δ 型集合 G 使 $G\supset E$ 且 $m(G-E)=0$. 因为 $G=(G-E)\cup E$，所以对任意 $x\in\mathrm{R}^p$，

$$G_x=(G-E)_x\cup E_x,$$

从而

$$E_x=G_x-(G-E)_x.$$

由定理 2，几乎对所有的 $x\in\mathrm{R}^p$，$(G-E)_x$ 是 R^q 中的可测集，而 G_x 则对一切 $x\in\mathrm{R}^p$ 都可测，所以几乎对所有的 $x\in\mathrm{R}^p$，E_x 都是 R^q 中的可测集. 证完.

我们要着重指出定理 3 的逆是不对的. Sierpinski 在二维平面上作出了一个点集 E，它在任何 x 处的截口 E_x 和在任何 y 处的

截口 $E^y=\{x;(x,y)\in E\}$ 都是单点集.（因而总是可测的.）但 E 本身却是一个二维的不可测集①.

习 题

1. 举例说明对 $\mathbf{R}^{p+q}$ 中的可测集 E，确实有可能存在 $x\in\mathbf{R}^p$ 使 E_x 不是 $\mathbf{R}^q$ 中的可测集.

2. 试在二维平面 $\mathbf{R}^2$ 中作一开集 G，使 G 的边界点所构成的集合的测度大于零.（提示：参考 § 3 习题第 1 题）

*§ 5 集合环上的测度的扩张

我们在 §§ 1—2 中所作的，是把一个本来只定义在全体区间的集合 $\mathscr{I}$ 上的可加集合函数(即以集合为自变量的函数)扩充定义到包含 $\mathscr{I}$ 的 σ-域 $\mathfrak{M}$ 上去使其具有完全可加性. 但是数学的发展要求人们走出欧氏空间，例如泛函分析要求我们考察紧(或局部紧)空间上的测度，群表示论与 Lie 群则要求我们讨论紧(以至局部紧)群上的左平移不变测度. 这些抽象空间上测度的建立，都基本上和 §§ 1—2 的作法相似，仍然是从定义于某一集类上的一集合函数出发引出外测度，然后得到可测集与测度. 为了得到这类问题的统一处理，我们现在介绍一般集合环上的测度概念并讨论其扩张. 就其定义域来说，它可说是很广的理论了，其实，它正是近代概率论赖以建立的基础.

定义 1 设 $\mathfrak{R}$ 是非空集合 S 的子集的一个非空族，如果

(1) 当 $A,B\in\mathfrak{R}$ 时，$A\cup B\in\mathfrak{R}$；

(2) 当 $A,B\in\mathfrak{R}$ 时，$A-B\in\mathfrak{R}$，

则我们就说 $\mathfrak{R}$ 是 S 的子集的一个**环**. 如果把(1)改为

① 见Hahn and Rosenthal, Set Functions, 1948, p. p. 241—242.

(1′) 对于任意一串$A_n\in\mathfrak{R}$，$n=1,2,3,\cdots$都有$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathfrak{R}$，则$\mathfrak{R}$就称为是$S$的子集的一个$\sigma$-环.

由于$\varnothing=A-A$, $A\cap B=A-(A-B)$，所以如果$\mathfrak{R}$是S的子集的一个环，则$\varnothing\in\mathfrak{R}$且当$A,B\in\mathfrak{R}$时，$A\cap B\in\mathfrak{R}$.

比较环和域的定义，注意到$A-B=A\cap B^c$便知域都是环，(σ-域都是σ-环.)反之如果$\mathfrak{R}$是S的子集的一个环并且$S\in\mathfrak{R}$，按第一章§1域的概念，则$\mathfrak{R}$必是S的子集的一个域，所以环和域的差别就在S是否属于$\mathfrak{R}$. 以下我们说到环和域都是指的某一事先给定的非空集合S的子集的环和域. 不再逐次声明.

例1 设$S=\mathbf{R}^n$，$\mathfrak{R}$是$\mathbf{R}^n$中全体可以表成有限个左闭右开区间①的并的子集所构成的集合类，则$\mathfrak{R}$是一环. 但全体左闭右开区间的集合$\mathscr{I}$不是一个环.

定义2 设$\mathfrak{B}$是一给定的环. $\alpha(B)$是定义于$\mathfrak{B}$上取值于$(-\infty,+\infty]$或$[-\infty,+\infty)$的集合函数②. 如果当B_1, $B_2\in\mathfrak{B}$, $B_1\cap B_2=\varnothing$时，恒有$\alpha(B_1\cup B_2)=\alpha(B_1)+\alpha(B_2)$，则称$\alpha$是**可加的**. 如果当$B_n\in\mathfrak{B}$, $n=1,2,3,\cdots$, 互不相交且$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n\in\mathfrak{B}$时，便有$\alpha\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha(B_n)$，则称$\alpha$是**完全可加的**. 如果对任意$B\in\mathfrak{B}$, $\alpha(B)\geqslant 0$，则称α为**非负的**. 所谓$\mathfrak{B}$上的一个测度α，就是定义于$\mathfrak{B}$上的一个非负的、完全可加的使$\alpha(\varnothing)=0$的广义集合函数.

注意只要α是$\mathfrak{B}$上的可加的集合函数，$\alpha(\varnothing)\neq\pm\infty$，则必有$\alpha(\varnothing)=0$，因为从可加性有$\alpha(\varnothing)+\alpha(\varnothing)=\alpha(\varnothing)$.

---

① 称I为左闭右开的区间，如果
$$I=\{(x_1,\cdots,x_n);a_i\leqslant x_i<b_i,i=1,\cdots,n\}.$$
② 集合函数的取值规定，请阅第四章开头说明.

例2 S 的有限子集构成一环$\mathscr{F}$，定义 $\alpha(F)$ 等于 F 中元素的个数，则 α 便是$\mathscr{F}$ 上的一个测度．通常称之为计数测度．由于我们可以对 S 的无限子集 E 补充定义 $\alpha(E)=+\infty$，所以上述 α 可直接扩充到由 S 的全体子集所作成的最大的 σ-域 $\mathscr{F}_1$ 上去，使之成为 $\mathscr{F}_1$ 上的一个测度．

以下我们讨论如何把一环 $\mathfrak{B}$ 上的测度扩充成为一个包含 $\mathfrak{B}$ 的 σ-环上的测度的问题．我们先证明一个预备性的定理．

定理1 若 α 是环 $\mathfrak{R}$ 上的不恒等于 $+\infty$ 的非负可加集合函数，则

(1) $\alpha(\varnothing)=0$;

(2) α 是单调的，即当 $A,B\in\mathfrak{R}$, $A\subset B$ 时，$\alpha(A)\leqslant\alpha(B)$;

(3) 如果 α 是次可加的，即当 $A_n\in\mathfrak{R}$, $n=1, 2, \cdots$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathfrak{R}$ 时，恒有 $\alpha\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\alpha(A_n)$，则 α 完全可加的充要条件是对任意一串 $A_n\in\mathfrak{R}$, $A_n\supset A_{n+1}$. $n\geqslant1$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$, $\alpha(A_1)<+\infty$ 都有 $\alpha(A_n)\to0$;

(4) 如果 $\mathfrak{R}$ 是一个域，$\alpha(S)<+\infty$，则 α 完全可加的充要条件是当 $A_n\in\mathfrak{R}$, $A_n\supset A_{n+1}$, $n\geqslant1$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$ 时，恒有 $\alpha(A_n)\to0$.

证明 首先，若 $A,B\in\mathfrak{R}$, $A\subset B$，则

$$\alpha(B)=\alpha(B-A)+\alpha(A)\geqslant\alpha(A).$$

这证明了 α 的单调性．又由于 α 不恒等于 $+\infty$，知 $\alpha(\varnothing)\neq+\infty$，从而 $\alpha(\varnothing)=0$．这证明了(2)和(1).

如果 α 是完全可加的. $A_n\in\mathfrak{R}$, $A_n\supset A_{n+1}$, $n\geqslant 1$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$, 令 $B_n=A_n-A_{n+1}$, $n=1,2,3,\cdots$, 则 $B_n\in\mathfrak{R}$ 且互不相交,

$$A_1=(A_1-A_2)\cup(A_2-A_3)\cup\cdots=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n.$$

因此

$$\alpha\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\alpha(A_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha(B_n).$$

如果 $\alpha(A_1)<+\infty$, 则所有 $\alpha(A_n)$ 也都小于 $+\infty$, 于是

$$\alpha(B_n)=\alpha(A_n)-\alpha(A_{n+1}),$$

$$\alpha(A_1)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\alpha(B_i)=\lim_{n\to\infty}\{\alpha(A_1)-\alpha(A_{n+1})\}$$

$$=\alpha(A_1)-\lim_{n\to\infty}\alpha(A_{n+1}),$$

可见 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha(A_n)=0$. 这证明了(3)和(4)的必要性部分.

最后证明(3)和(4)的充分性部分. 设 $B_n\in\mathfrak{R}$, $n=1,2,3,\cdots$ 是互不相交的, $\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\in\mathfrak{R}$. 令 $A_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}B_k$, 则 $A_n=A_1-\bigcup_{k=1}^{n-1}B_k\in\mathfrak{R}$, $A_n\supset A_{n+1}$, $n\geqslant 1$, 并且 $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$. 事实上, 若有 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$, 则 $x\in A_1=\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k$. 所以有 k_0 使 $x\in B_{k_0}$. 而 x 又属于 $A_{k_0+1}=\bigcup_{k=k_0+1}^{\infty}B_k$, 因而有 $k_1\geqslant k_0+1$ 使 $x\in B_{k_1}$, 这与 B_{k_0} 和 B_{k_1} 不相交的条件相冲突. 从 α 的可加性及

$$A_1=\left(\bigcup_{k=1}^{n-1}B_k\right)\cup A_n,\quad \left(\bigcup_{k=1}^{n-1}B_k\right)\cap A_n=\varnothing,$$

知

$$\alpha(A_1)=\alpha\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)=\alpha(A_n)+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha(B_k). \qquad (*)$$

在(4)的情形，应有 $\alpha(A_n)\to 0$，所以在上式中令 $n\to\infty$ 便得

$$\alpha\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha(B_k).$$

在(3)的情形，如果 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha(B_k)<+\infty$，则由 α 的次可加性知

$$\alpha(A_1)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\alpha(B_k)<+\infty,$$

于是由条件知 $\alpha(A_n)\to 0$. 所以可和 (4) 的情形一样得到 $\alpha\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha(B_k)$；如果 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha(B_k)=+\infty$. 则(*)式说明 $\alpha(A_1)=\alpha\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)=+\infty$. 这时自然也有 $\alpha\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha(B_k)$. 证完.

通常把定义于环上的不恒等于 $+\infty$ 的次可加的非负单调集合函数称为这个环上的一个**外测度**. 因此上述定理说明一个环 $\mathfrak{R}$ 上的外测度如果在这个环上有可加性，则它是这个环上的一个测度的充要条件是：对任意一串 $A_n\in\mathfrak{R}$, $A_n\supset A_{n+1}$, $n\geqslant 1$，如果 $\alpha(A_1)<+\infty$，$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\varnothing$，则 $\alpha(A_n)\to 0$. 这个条件称为**连续性条件**.

设 $\mathfrak{R}$ 是一个环. 定义

$$\mathscr{H}=\{A;\text{存在一串 } A_n\in\mathfrak{R}, \text{使 } A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\}.$$

易见 $\mathscr{H}$ 是一 σ-环. 而如果 $\mathfrak{R}$ 本来就是个域，则 $\mathscr{H}$ 即为由 S 的全

体子集所构成的最大的σ-域. 现设α是$\mathfrak{R}$上的一个测度,对于每一$A\in\mathscr{H}$,定义

$$\alpha^*(A)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\alpha(A_i);\ A_i\in\mathfrak{R},\ \bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\supset A\right\}.$$

显然α^*是定义于$\mathscr{H}$上的广义集合函数,$\alpha(\varnothing)=0$.

定理 2 α^*具有下述基本性质.

(1) $\alpha^*(A)\geqslant 0,\alpha^*(\varnothing)=0$. (非负性);

(2) 当$A\subset B$, $A,B\in\mathscr{H}$时,$\alpha^*(A)\leqslant\alpha^*(B)$. (单调性);

(3) 若$A_i\in\mathscr{H}$, $i=1,2,3,\cdots$, 则$\alpha^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\alpha^*(A_i)$.

(次完全可加性);

(4) 当$E\in\mathfrak{R}$时,$\alpha^*(E)=\alpha(E)$.

证明 (1) (2) 是显然的. (3)的证明和§1中证明外测度的基本性质(III)时一样,只要把那儿的开区间序列$\{I_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$换成$\mathfrak{R}$中的集合的序列$\{A_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$.

现证(4). 由于

$$E=E\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots,$$

所以由α^*的定义知$\alpha^*(E)\leqslant\alpha(E)$. 另一方面, 如果$A_i\in\mathfrak{R}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\supset E$,我们令$B_1=A_1,B_i=A_i-\bigcup_{k=1}^{i-1}A_k$, $i=2,3,4,\cdots$, 则$B_n\in\mathfrak{R}$, 且两两不交, $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}(E\cap B_i)$,因此由$\alpha$的完全可加性,

$$\alpha(E)=\alpha\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E\cap B_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha(E\cap B_i)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\alpha(B_i)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\alpha(A_i),$$

可见 $\alpha^*(E)\geqslant\alpha(E)$. 于是 $\alpha^*(E)=\alpha(E)$. 证完.

定义 3 对于 $A\in\mathscr{H}$,如果等式

$$\alpha^*(T)=\alpha^*(T\cap A)+\alpha^*(T\cap A^c)$$

对任意 $T\in\mathscr{H}$都成立,则称 A 为(关于测度 α^*)可测的.(由于$T\cap A^c=T-A$, $\mathscr{H}$是环,所以 $T\cap A^c\in\mathscr{H}$.)

定理 3 如果用$\mathfrak{M}_{\alpha^*}$表示全体(关于 α^*)为可测的集合的集合类,则

(1) $\mathfrak{M}_{\alpha^*}\supset\mathfrak{R}$.

(2) $\mathfrak{M}_{\alpha^*}$是一 σ-环.

(3) α^* 是$\mathfrak{M}_{\alpha^*}$上的测度.

证明 先证(1). 设 $E\in\mathfrak{R}$. 对任意 $T\in\mathscr{H}$, 由 $T=(T\cap E)\cup(T\cap E^c)$及$\alpha^*$ 的次完全可加性,

$$\alpha^*(T)\leqslant\alpha^*(T\cap E)+\alpha^*(T\cap E^c).$$

另一方面,对任意 $\varepsilon>0$, 由 $\alpha^*(T)$的定义,有 $A_i\in\mathfrak{R}$, $i=1,2,3,\cdots$ 使 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\supset T$, $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha(A_i)\leqslant\alpha^*(T)+\varepsilon$.由于$A_i=(A_i\cap E)\cup(A_i\cap E^c)$

$$\alpha(A_i)=\alpha(A_i\cap E)+\alpha(A_i\cap E^c).$$

所以

$$\varepsilon+\alpha^*(T)\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}\alpha(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha(A_i\cap E)+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha(A_i\cap E^c)$$

$$\geqslant\alpha\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i\cap E)\right)+\alpha\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i\cap E^c)\right).$$

显然 $\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i\cap E)=\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\cap E\supset T\cap E,$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i\cap E^c)=\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\cap E^c\supset T\cap E^c.$$

因此

$$\varepsilon+\alpha^*(T)\geqslant\alpha(T\cap E)+\alpha(T\cap E^c).$$

上式对任意 $\varepsilon>0$ 都成立. 所以

$$\alpha^*(T)=\alpha^*(T\cap E)+\alpha^*(T\cap E^c).$$

即 $E\in\mathfrak{M}_{\alpha^*}$. (1)得证.

现证(2). 首先注意对于 $S_1, S_2\in\mathfrak{M}_{\alpha^*}$, 并集 $S_1\cup S_2\in\mathfrak{M}_{\alpha^*}$ 的证明和§2定理2中的证明完全一样. 以下我们证明 $S_1-S_2\in\mathfrak{M}_{\alpha^*}$. 对于任意 $T\in\mathscr{H}$, 还是象在§2定理2的证明中那样写成

$$T=A\cup B\cup C\cup D, A=T\cap(S_1-S_2),\quad B=T\cap S_2-S_1,$$
$$C=T\cap S_1\cap S_2, D=T-S_1-S_2.$$

显然 $A, B, C, D\in\mathscr{H}$, 且互不相交. 令

$$T_1=A\cup C,\qquad T_2=B\cup C\cup D,$$

则 $T_1, T_2\in\mathscr{H}$. 由 S_1 和 S_2 的可测性,

$$\alpha^*(T)=\alpha^*(T\cap S_1)+\alpha^*(T\cap S_1^c)=\alpha^*(T_1)+\alpha^*(B\cup D),$$
$$\alpha^*(T_1)=\alpha^*(T_1\cap S_2)+\alpha^*(T_1\cap S_2^c)=\alpha^*(C)+\alpha^*(A),$$
$$\alpha^*(T_2)=\alpha^*(T_2\cap S_1)+\alpha^*(T_2\cap S_1^c)=\alpha^*(C)+\alpha^*(B\cup D).$$

因此

$$\alpha^*(T)=\alpha^*(A)+\alpha^*(B\cup C\cup D)$$
$$=\alpha^*(T\cap(S_1-S_2))+\alpha^*(T\cap(S_1-S_2)^c),$$

即 $S_1-S_2\in\mathfrak{M}_{\alpha^*}$. 这样我们已证明 $\mathfrak{M}_{\alpha^*}$ 是一个环.

为证 $\mathfrak{M}_{\alpha}^*$ 是一 σ-环. 设 $S_i\in\mathfrak{M}_{\alpha^*}, i=1,2,3,\cdots$. $A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}S_i$.

显然我们不妨假设诸 S_i 是互不相交的. 对于 $T\in\mathscr{H}$ 由 α^* 在 $\mathscr{H}$ 上的次完全可加性知

$$\alpha^*(T)\leqslant\alpha^*(T\cap A)+\alpha^*(T\cap A^c)$$

总是成立的. 另一方面完全套用 § 2 推论 2 的证明, 易见对任意n,

$$\alpha^*\left(T\cap\bigcup_{i=1}^{n}S_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha^*(T\cap S_i),$$

所以从 $\bigcup_{i=1}^{n}S_i\in\mathfrak{M}_{\alpha^*}$ 知

$$\begin{aligned}\alpha^*(T)&=\alpha^*\left(T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}S_i\right)\right)+\alpha^*\left(T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}S_i\right)^c\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\alpha^*(T\cap S_i)+\alpha^*\left(T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}S_i\right)^c\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\alpha^*(T\cap S_i)+\alpha^*\left(T\cap\left(\bigcap_{i=1}^{n}S_i^c\right)\right)\\&\geqslant\sum_{i=1}^{n}\alpha^*(T\cap S_i)+\alpha^*\left(T\cap\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}S_i^c\right)\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\alpha^*(T\cap S_i)+\alpha^*(T\cap A^c).\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$, 便可由 α^* 的次可加性而得

$$\begin{aligned}\alpha^*(T)&\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}\alpha^*(T\cap S_i)+\alpha^*(T\cap A^c)\\&\geqslant\alpha^*\left(T\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i\right)+\alpha^*(T\cap A^c)\\&=\alpha^*(T\cap A)+\alpha^*(T\cap A^c).\end{aligned}$$

这样我们就证明了 $A\in\mathfrak{M}_{\alpha^*}$, 即 $\mathfrak{M}_{\alpha^*}$确实是一个 σ-环. 最后如果我们以 $T_1=T\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i$ 代上式中的 T, 注意 $\alpha^*(T_1\cap A^c)=\alpha^*(\varnothing)$

$=0$，则还可得

$$\alpha^*\left(T\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha^*(T\cap S_i).$$

这是蕴含了 α^* 在 $\mathfrak{M}_{\alpha^*}$ 上的完全可加性为其一特款的，因此 α^* 是 $\mathfrak{M}_{\alpha^*}$ 上的测度．证完．

上述定理中的定义于 $\mathfrak{M}_{\alpha^*}$ 上的测度 α^* 称为环 $\mathfrak{R}$ 上的测度 α 的一个**扩张**(或**延拓**)．它和原来的 α 的重要差别在于 α^* 的定义域 $\mathfrak{M}_{\alpha^*}$ 已经是一个对可数并运算封闭的 σ-环．另外，以上我们谈的都是环上的情况．如果原来的 $\mathfrak{R}$ 是个域，则 $S\in\mathfrak{R}$，从而 $S\in\mathfrak{M}_{\alpha^*}$．于是 $\mathfrak{M}_{\alpha^*}$ 也就是一个 σ-域．

定义于集合环 $\mathfrak{R}$ 上的测度 α 称为是**完全的**(或**完备的**)，如果当 $E\in\mathfrak{R}$，$\alpha(E)=0$ 时，E 的所有子集也都属于 $\mathfrak{R}$．对于前面讨论的 α 的扩张 α^* 来说，根据定义 3，任何使 $\alpha^*(E)=0$ 的 $E\in\mathscr{H}$ 都是关于 α^* 可测的．又如果 $E\in\mathscr{H}$，则 E 的子集也都属于 $\mathscr{H}$．再根据 α^* 的单调性便知当 $E\in\mathfrak{M}_{\alpha^*}$，$\alpha^*(E)=0$ 时，E 的子集也都属于 $\mathfrak{M}_{\alpha^*}$．这也就是说不论原来的定义于 $\mathfrak{R}$ 上的测度 α 是否完全，上述定义于 $\mathfrak{M}_{\alpha^*}$ 上的扩张 α^* 总是完全的．这样我们也就证明了任何测度都一定有完全的扩张．

关于 σ-环，和 σ-域的情况一样，对于 S 的子集的任意一非空族 $\mathscr{E}$，在 S 的子集的，包含 $\mathscr{E}$ 的 σ-环中，必有一最小的，即所有包含 $\mathscr{E}$ 的 σ-环的交，它称为由 $\mathscr{E}$ 产生的 σ-环，记作 $\mathfrak{S}(\mathscr{E})$．

根据前面的讨论，当 α 是环 $\mathfrak{R}$ 上的测度时，我们可以作出它的一个定义于 $\mathfrak{M}_{\alpha^*}$ 上的扩张 α^* 来．由于 $\mathfrak{M}_{\alpha^*}$ 是包含 $\mathfrak{R}$ 的一个 σ-环，所以 $\mathfrak{M}_{\alpha^*}\supset\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$．于是当我们将 α^* 限定在 $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ 上时，便得到定义在 $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ 上的一个测度．它也是原来的 α 的一个扩张．不过一般说来，这时 α^* 已不再是完全的了．另外，前面我们只是介

绍了一种将定义于环上的测度扩充成为定义于 σ-环上的测度的办法，并没有说这种扩张是唯一的. 不过可以证明如果 α 是有限(值)的或 σ-有限的，即对任意 $A\in\mathfrak{R}$，在 $\mathfrak{R}$ 中都存在可数多个测度有限的 A_i，使 $A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，则定义于任何 σ-环 $\widetilde{\mathfrak{R}}_i$ 上的测度 $\bar{\alpha}_i$，$i=1,2$，只要它们都是 α 的扩张，即 $\widetilde{\mathfrak{R}}_i\supset\mathfrak{R}$ 且对 $A\in\mathfrak{R}$ 有 $\bar{\alpha}_i(A)=\alpha(A)$，$i=1,2$，则在 $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ 上 $\bar{\alpha}_1$ 和 $\bar{\alpha}_2$ 必是相等的. 这也就是说当 α 是有限或 σ-有限测度时，α 在 $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ 上的扩张具有唯一性. 这种唯一性有时有重要的意义. 证明可参见脚注①.

除 Lebesgue 测度外，在许多数学问题中要用到 Lebesgue-Stieltjes 测度. 这是由一个给定的“分布函数”产生的，定义于 $\mathbf{R}^n$ 的子集的一个 σ-域上的测度. 对于 $\mathbf{R}^n$ 上的函数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)$. 如果关于每一个变量 x_i，$1\leqslant i\leqslant n$，$f(x)$ 都是右连续的，即都有

$$\lim_{h\to 0^+}f(x_1,\cdots,x_i+h,\cdots,x_n)$$
$$=f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n),$$

则我们就说 $f(x)$ 是右侧连续的. 对于 $a<b$ 及 $1\leqslant i\leqslant n$，令

$$\Delta_i(f;a,b)=f(x_1,\cdots,x_{i-1},b,x_{i+1},\cdots,x_n)$$
$$-f(x_1,\cdots,x_{i-1},a,x_{i+1},\cdots,x_n).$$

定义 4 称 $\mathbf{R}^n$ 上的函数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的一个**广义的分布函数**，如果 $f(x)$ 是右侧连续的并且对于 $\mathbf{R}^n$ 中任意的左开右闭的区间

$$I=\{(x_1,\cdots,x_n);a_i<x_i\leqslant b_i,i=1,2,,\cdots,n\}$$

都有②

$$\mu_f(I)=\Delta_1(\Delta_2(\cdots)\Delta_n(f;a_n,b_n);a_{n-1},b_{n-1});\cdots,a_2,b_2);a_1,b_1)\geqslant 0.$$

现在用 $\mathfrak{R}_0$ 表 $\mathbf{R}^n$ 中那些能表成有限多个左开右闭区间的并

---

① 严绍宗等编著，《实变函数论与泛函分析》，上册，第二版，第 129—130 页.

的集合所作成的集合，则 $\mathfrak{R}_0$ 是一个环．利用上述 $\mu_f(I)$ 就可在 $\mathfrak{R}_0$ 上定义出一个非负的可加集合函数来，并可证明它是 $\mathfrak{R}_0$ 上的一个测度．于是根据前面介绍的办法，就可将其扩充成为定义在某一 σ-域 $\mathfrak{M}_f$ 上的完全测度．这个测度称为由广义的分布函数 $f(x)$ 产生的 Lebesgue-Stieltjes 测度．不过如要把这个过程具体化．那就要先明确如何利用 μ_f 去定义 $\mathfrak{R}_0$ 上的可加集合函数，并证明它确实是 $\mathfrak{R}_0$ 上的一个测度．这需要许多很繁琐的论证．事实上，我们完全可以不必这样．对于 $\mathbf{R}^n$ 的任意子集 A，仿照在 §1 中定义 Lebesgue外测度那样，我们可以定义由 f 产生的Lebesgue-Stieltjes 外测度

$$\mu_f^*(A)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu_f(I_i),\ I_i\text{ 为左开右闭区间},\ \bigcup_{i=1}^{\infty}I_i\supset A\right\}.$$

然后用几乎完全一样的办法证明 μ_f^* 也有 §1 中所开列的四条基本性质．进而用

$$\mu_f^*(T)=\mu_f^*(T\cap A)+\mu_f^*(T\cap A^c),$$

对任何 $T\subset\mathbf{R}^n$ 都成立来定义 A 的可测性，并和 §2 中一样证明全体可测集的类 $\mathfrak{M}_f$ 是一 σ-域．μ_f^* 在 $\mathfrak{M}_f$ 上是一完全的测度．最后同样证明任何开集，从而任何 Borel 集合都是可测的，特别是 $\mathfrak{M}_f\supset\mathfrak{R}_0$，由于所有这些推理基本上和 §§1—2中所作过的相同．我们此处不再重复．其实$\mathbf{R}^n$ 上的 Lebesgue测度就是由 $f(x)=x_1x_2\cdots x_n$ 所产生的Lebesgue-Stieltjes 测度．

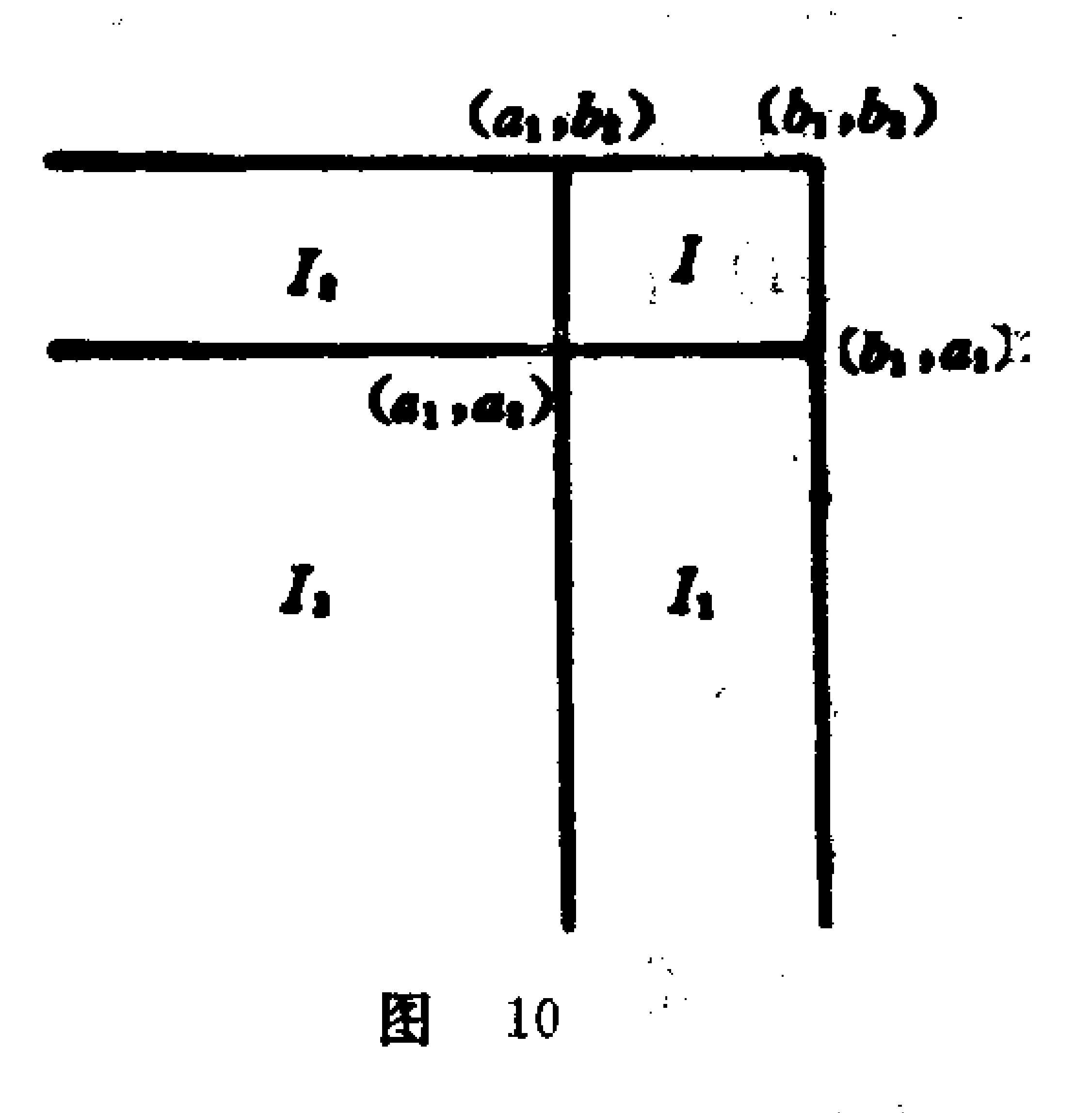


图 10

② 在 $n=1$ 时，$\mu_f((a,b])=f(b)-f(a)$．所以条件 $\mu_f\geqslant0$ 就是说 $f(x)$ 是$\mathbf{R}^1$ 上的递增函数．当 $n=2$，$I=\{(x_1,x_2);a_1<x_1\leqslant b_1,a_2<x_2\leqslant b_2\}$时，

$$\mu_f(I)=f(b_1,b_2)-f(a_1,b_2)-f(b_1,a_2)+f(a_1,a_2).$$

（参见附图及本书第一版第 134—135 页）

作为本节的结束，我们要就最简单的情形，对近年来有广泛应用的 Hausdorff 测度和 Hausdorff 维数作点简单介绍，它也是前面介绍的抽象测度的另一个具体的例子.

$\mathbf{R}^1$ 上的一类 Hausdorff 测度 对于固定的实数 $p>0$ 及任意 $A\subset\mathbf{R}^1$, $\delta>0$. 定义 $H_{p\delta}^*(A)$ 为 $\inf\sum_k|I_k|^p$, 此处 I_k 都是开区间，$|I_k|$ 表 I_k 的长度，下确界是对所有能覆盖 A 的每个的长度都不超过 δ 的有限或可数开区间序列取的，即

$$H_{p,\delta}^*(A)$$

$$=\inf\left\{\sum_{k=1}^m|I_k|^p; I_k\text{ 为开区间}, |I_k|\leqslant\delta, A\subset\bigcup_{k=1}^m I_k, m\leqslant\infty\right\}.$$

显然，对于固定的 p 和 A, 在 δ 减小时 $H_{p,\delta}^*(A)$ 只可能增大，因此 $\lim\limits_{\delta\to0^+}H_{p,\delta}^*(A)$ 是存在的(这里允许 $+\infty$ 作为极限)，我们定义 A 的 **p-维 Hausdorff 外测度** $H_p^*(A)$ 为 $\lim\limits_{\delta\to0^+}H_{p,\delta}^*(A)$, 即

$$H_p^*(A)=\lim_{\delta\to0^+}H_{p,\delta}^*(A).$$

由于区间的长度具有平移不变性，所以易见 Hausdorff 外测度也是平移不变的，即对于任意 $x\in\mathbf{R}^1$, $A\subset\mathbf{R}^1$ 都有 $H_p^*(x+A)=H_p^*(A)$. 另外这样定义的 Hausdorff 外测度还有下述类似于 Lebesgue 外测度的基本性质:

(i) $H_p^*(A)\geqslant0, H_p^*(\varnothing)=0$;

(ii) 若 $A\subset B$, 则 $H_p^*(A)\leqslant H_p^*(B)$;

(iii) $H_p^*\left(\bigcup\limits_{k=1}^\infty A_k\right)\leqslant\sum\limits_{k=1}^\infty H_p^*(A_k)$;

(iv) 若 $\rho(A, B)=d>0$, 则 $H_p^*(A\cup B)=H_p^*(A)+H_p^*(B)$.

性质(i)，(ii)是显然的. 性质(iii) 的证明只要注意对任意 $\delta>0$ 和 $\varepsilon>0$, 都可仿照 §1 中证明 Lebesgue 外测度的性质(iii) 的办

法得到

$$H^*_{p,\delta}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}H^*_p(A_k)+\varepsilon$$

即可完成. 至于性质(iv), 同样是可以仿照 § 1 中的证明去作的, 不过由于当 $0<\delta<d$ 时, 任何一组覆盖 $A\cup B$ 的, 每一个的长度都不超过 δ 的开区间都可自然地分成两组, 分别覆盖 A 和 B. 所以实际上这时已有 $H^*_{p,\delta}(A\cup B)=H^*_{p,\delta}(A)+H^*_{p,\delta}(B)$.

Hausdorff 外测度的另一重要性质是:

(v) $H^*_p(\lambda A)=\lambda^p H^*_p(A), \lambda>0$(参考 § 3 习题的第 6 题).

这是可以从容易得到的恒等式

$$H^*_{p,\lambda\delta}(\lambda A)=\lambda^p H^*_{p,\delta}(A)\quad(\delta>0)$$

直接导出的.

命题 1 若 $q>p$, $H^*_p(A)<+\infty$, 则 $H^*_q(A)=0$. 从而若 $0<H^*_q(B)$, 则 $H^*_p(B)=+\infty$.

证明 显然, 只要证明前一结论. 注意当区间 I 的长度 $|I|\leqslant\delta$ 时, $|I|^q/|I|^p=|I|^{q-p}\leqslant\delta^{q-p}$. 所以如果

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{m}I_k, |I_k|\leqslant\delta, k=1,2,\cdots,m\leqslant+\infty,$$

则

$$H^*_{q,\delta}(A)\leqslant\sum_k|I_k|^q\leqslant\delta^{q-p}\sum_k|I_k|^p.$$

因此

$$H^*_{q,\delta}(A)\leqslant\delta^{q-p}H^*_{p,\delta}(A)\leqslant\delta^{q-p}H^*_p(A).$$

令 $\delta\to0^+$ 即得 $H^*_q(A)=0$.

命题 2 $p=1$ 时, Hausdorff 外测度 H^*_p 就是 Lebesgue 外测度 m^*, 即 $H^*_1(A)=m^*A$ 对一切 $A\subset\mathbf{R}^1$ 成立.

证明 从定义即知对任意 $A\subset\mathbf{R}^1$ 及 $\delta>0$ 都有 $m^*A\leqslant$

$H^*_{1,\delta}(A)$，所以$m^*A\leqslant H^*_1(A)$．如果$m^*A=+\infty$，则$m^*A=H^*_1(A)$自然成立．如果$m^*A<+\infty, \varepsilon>0$，则应有开区间序列$\{I_n\}$，使

$$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n,\qquad m^*A>\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|-\varepsilon.$$

由于对每一区间I_n及$\delta>0$，我们都可以取一组开区间$\{I_{n,j}\}$，使

$$I_n\subset\bigcup_{j=1}^{m_n}I_{n,j},\quad |I_{n,j}|\leqslant\delta, j=1,2,3,\cdots;$$

$$\sum_j|I_{n,j}|<|I_n|+\frac{\varepsilon}{2^n},$$

所以$H_{1,\delta}(I_n)<|I_n|+\frac{\varepsilon}{2^n}$，从而$H_1(I_n)\leqslant|I_n|+\frac{\varepsilon}{2^n}$. 于是从基本性质(ii)和(iii)便知

$$H^*_1(A)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}H^*_1(I_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}<m^*A+2\varepsilon.$$

注意到$\varepsilon>0$是任意的，便有$H^*_1(A)\leqslant m^*A$. 证完.

推论 若I是一非蜕化区间，则$H^*_1(I)=|I|$，而当$0<p<1$时，$H^*_p(I)=+\infty$；当$p>1$时，$H^*_p(I)=0$. 特别是$H^*_p(\mathbb{R}^1)=+\infty$如果$0<p\leqslant1$；$H^*_p(\mathbb{R}^1)=0$，如果$p>1$.

证明 当I为有限区间时，从命题2及命题1即得．如果I是一无穷区间，将I分解为可数多个有限区间的并，即可从基本性质(ii)和(iii)得到本推论的结论.

虽然 Hausdorff 外测度与 Lebesgue 外测度有许多相同之处，但从上述推论我们看到当$p>1$时，$\mathbb{R}^1$中任何区间，从而任何子集A的 Hausdorff 外测度$H^*_p(A)$竟然全都是零，因此以下我们主要考虑$0<p<1$的情形．此外，在$0<p<1$时，即便A是有界的，也还可能有$H^*_p(A)=+\infty$，这展示出两种外测度的显著差异.

点集 $A\subset\mathbf{R}^1$ 说是关于H_p^*可测的，是指对于任意$T\subset\mathbf{R}^1$ 等式

$$H_p^*(T)=H_p^*(T\cap A)+H_p^*(T\cap A^c)$$

都成立. 于是和在 §2 中一样可以证明所有关于 H_p^*可测的集合，构成 $\mathbf{R}^1$ 的子集的一个 σ-域 $\mathfrak{M}_p$. 限制在 $\mathfrak{M}_p$ 上时，H_p^* 是完全可加的，从而是一测度. 另外，$\mathbf{R}^1$ 中的任何 Borel 集合还都是关于 H_p^* 可测的. 由于所有这些事实的证明都可套用 §2 中相应结论的证明，我们在此不再详细讨论.

对于固定的 $A\subset\mathbf{R}^1$. 令

$$p_0=\inf\{p;H_p^*(A)=0,p>0\},$$

称之为A的 Hausdorff 维数，记为 $d_H(A)$. 如果不是对所有的 $p>0$ 都有 $H_p^*(A)=0$，即存在 $q>0$，使 $H_q^*(A)>0$，则这个 q 一定不大于 1，而且由命题 1 知，对任何 $p<q$ 都有 $H_p^*(A)=+\infty$，即数集$\{p;H_p^*(A)=0\}\subset[q,\infty)$，故

$$0<p_0\leqslant 1.$$

若 $0<p<p_0$，取 p' 使 $p<p'<p_0$，则 $H_{p'}^*(A)>0$，由命题 1 便有 $H_p^*(A)=+\infty$；当 $p>p_0$ 时，必然有 $H_p^*(A)=0$，因为如果 $H_p^*(A)>0$，则由 p_0 的定义有 p_1 使 $p_0<p_1<p$，$H_{p_1}^*(A)=0$. 但从命题 1 却应有 $H_{p_1}^*(A)=+\infty$，产生矛盾. 总之

$$H_p^*(A)=\begin{cases}+\infty, & \text{当 } 0<p<p_0.\\ 0, & \text{当 } p>p_0.\end{cases}$$

从命题 2 的推论，当 I 是非蜕化区间或 $I=\mathbf{R}^1$ 时，

$$H_p^*(I)=\begin{cases}+\infty, & \text{当 } 0<p<1,\\ 0, & \text{当 } p>1.\end{cases}$$

所以

$$d_H(I)=1.$$

由于对于任意 $p>0$，单点集$\{x\}$的 Hausdorff 测度都是零，从而 $\mathbf{R}^1$ 中任何可数点集的 Hausdorff 测度都是零，所以若A是 $\mathbf{R}^1$

中的可数点集，则 $d_H(A)=0$. 另一方面，从命题 2，任何具有正的 Lebesgue 外测度的集合的 Hausdorff 维数都是 1，因此如果 $\mathbb{R}^1$ 的子集 A 的 Hausdorff 维数 $d_H(A)<1$，则一定有 $m^*A=0$. 那么有没有 Hausdorff 维数大于零而又小于 1 的集合呢？

例 3 Cantor 集合 C 的 Hausdorff 维数 $d_H(C)=\log 2/\log 3$.

证明 令 $C_1=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cap C$, $C_2=\left[\frac{2}{3},1\right]\cap C$. 从 Cautor 集合的产生过程易见

$$C_1=\frac{1}{3}C, \qquad C_2=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}C, \qquad \rho(C_1,\ C_2)=\frac{1}{3}>0.$$

所以从 Hausdorff 外测度的平移不变性及基本性质 (iv) 和(v)知对任意 $p>0$ 都有

$$H_p^*(C_2)=H_p^*(C_1), \qquad H_p^*(C_1)=\left(\frac{1}{3}\right)^p H_p^*(C),$$

$$H_p^*(C)=H_p^*(C_1)+H_p^*(C_2)=2\left(\frac{1}{3}\right)^p H_p^*(C).$$

因此，或者 $H_p^*(C)=0$ 或 $+\infty$，或者 $0<H_p^*(C)<+\infty$，$p=\log 2/\log 3$. 如果对于 $p_0=\log 2/\log 3$，确实有 $0<H_{p_0}^*(C)<+\infty$，则由命题 1，当 $p>p_0$ 时 $H_p^*(C)=0$；当 $0<p<p_0$ 时 $H_p^*(C)=+\infty$，从而便证明了 $d_H(C)=p_0=\log 2/\log 3$. 下面我们就来证明 $0<H_{p_0}^*(C)<+\infty$.

设 $\delta>0$，开区间 $I_i(i=1,2,3,\cdots)$ 的长度 $|I_i|\leqslant\delta$，$C\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$. 令

$$I_i^{(1)}=\frac{1}{3}I_i, \qquad I_i^{(2)}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}I_i, \qquad i=1,2,3,\cdots,$$

则 $C_1\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i^{(1)}$, $C_2\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i^{(2)}$. 注意 $|I_i^{(1)}|\leqslant\frac{1}{3}\delta$, $|I_i^{(2)}|\leqslant\frac{1}{3}\delta$, $i=$

$1,2,3,\cdots$, 所以

$$\sum_{i=1}^{\infty}|I_i^{(1)}|^{p_0}\geqslant H^*_{p_0,\frac{1}{3}\delta}(C_1),\quad \sum_{i=1}^{\infty}|I_i^{(2)}|^{p_0}\geqslant H^*_{p_0,\frac{1}{3}\delta}(C_2),$$

于是由

$$2\left(\frac{1}{3}\right)^{p_0}=2(e^{-\log 3})^{\log 2/\log 3}=2(e^{-\log 2})=1,$$

$$|I_i^{(1)}|^{p_0}+|I_i^{(2)}|^{p_0}=2\left(\frac{1}{3}\right)^{p_0}|I_i|^{p_0}=|I_i|^{p_0},\ i=1,2,3,\cdots,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|^{p_0}=\sum_{i=1}^{\infty}|I_i^{(1)}|^{p_0}+\sum_{i=1}^{\infty}|I_i^{(2)}|^{p_0},$$

便知

$$\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|^{p_0}\geqslant H^*_{p_0,\frac{1}{3}\delta}(C_1)+H^*_{p_0,\frac{1}{3}\delta}(C_2)=2H^*_{p_0,\frac{1}{3}\delta}(C_1)$$

$$=2\left(\frac{1}{3}\right)^{p_0}H^*_{p_0,\frac{1}{3}\delta}(C)=H^*_{p_0,\frac{1}{3}\delta}(C).$$

从而$H^*_{p_0,\delta}(C)\geqslant H^*_{p_0,\frac{1}{3}\delta}(C)$. 可是由 $H^*_{p_0,\delta}$ 的定义, 当 $\delta>0$减小时, $H^*_{p_0,\delta}(C)$是δ 的递增函数, 所以我们有 $H^*_{p_0,\delta}(C)=H^*_{p_0,\frac{1}{3}\delta}(C)$. 注意到这里的 $\delta>0$ 是任意的且 $H^*_{p_0,\delta}(C)$ 作为δ 的函数的单调性, 便知 $H^*_{p_0,\delta}(C)$实际上是不随δ 而变的. 因此 $H^*_{p_0}(C)=H^*_{p_0,2}(C)$, 易见 $H^*_{p_0,2}(C)\leqslant H^*_{p_0,2}([0,1])\leqslant 1$, 所以 $H^*_{p_0}(C)\leqslant 1<+\infty$.

为证 $H^*_{p_0}(C)>0$. 取 δ_0 使 $0<\delta_0<1/3$. 设$\{I_i\}$ 是C的任意一个有限或可数开覆盖, $|I_i|\leqslant\delta_0$, $i=1,2,3\cdots$. 由于C是一有界闭集, 由Borel有限覆盖定理, 我们总可从$\{I_i\}$中选出有限多个区间, $J_1,\cdots,J_m$, 使 $C\subset\bigcup_{j=1}^{m}J_j$. 于是$\sum_i|I_i|^{p_0}\geqslant\sum_{j=1}^{m}|J_j|^{p_0}$. 如果我们

能证明这时总有$\sum_{j=1}^{m}|J_j|^{p_0}\geqslant\left(\frac{1}{3}\right)^{p_0}$，则由定义即知$H^*_{p_0,\delta_0}(C)\geqslant\left(\frac{1}{3}\right)^{p_0}$，从而$H^*_{p_0}(C)\geqslant H^*_{p_0,\delta_0}(C)\geqslant\left(\frac{1}{3}\right)^{p_0}>0$. 以下我们就来证明

$$\sum_{j=1}^{m}|J_j|^{p_0}\geqslant\left(\frac{1}{3}\right)^{p_0}.$$

令$l_0=\min\{|J_j|; j=1, 2, \cdots, m\}$，则$0<l_0\leqslant\delta_0<\frac{1}{3}$. 注意$\rho(C_1,C_2)=\frac{1}{3}>\delta_0$，而每一$J_j$的长度都不大于$\delta_0$，所以可以把$\{J_j\}_{j=1}^{m}$分成两组：$\{J_{i,1}\}_{i=1}^{m_1}$，$\{J_{i,2}\}_{i=1}^{m_2}$，$m_1+m_2=m$，使它们分别覆盖$C_1$和$C_2$. 这时

$$\sum_{j=1}^{m}|J_j|^{p_0}=\sum_{i=1}^{m_1}|J_{i,1}|^{p_0}+\sum_{i=1}^{m_2}|J_{i,2}|^{p_0}.$$

如果$\sum_{i=1}^{m_1}|J_{i,1}|^{p_0}\leqslant\sum_{i=1}^{m_2}|J_{i,2}|^{p_0}$，则令

$$J'_i=3J_{i,1},\quad i=1,2,\cdots,m';m'=m_1$$

否则令

$$J'_i=3\left(J_{i,2}-\frac{2}{3}\right),\quad i=1,2,\cdots,m';m'=m_2.$$

注意$C_1=\frac{1}{3}C$，$C_2=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}C$，便知$\{J'_j\}_{j=1}^{m'}$是$C$的一个新的开覆盖，并且因$3^{p_0}=2$，

$$\sum_{j=1}^{m'}|J'_j|^{p_0}=3^{p_0}\sum_{j=1}^{m_1}|J_{j,1}|^{p_0}\text{或}3^{p_0}\sum_{j=1}^{m_2}|J_{j,2}|^{p_0}$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{m}|J_j|^{p_0}.$$

如果 $l_1=\min\{|J'_i|;i=1,2,\cdots,m'\}\geqslant\frac{1}{3}$，则上式说明 $\sum_{j=1}^{m}|J_j|^{p_0}\geqslant\left(\frac{1}{3}\right)^{p_0}$. 证明即已完成. 如果 $0<l_1<\frac{1}{3}$, 则以 $\{J'_j\}_{j=1}^{m'}$ 代替原来的 $\{J_j\}_{j=1}^{m}$, 又可重复同样的作法而再得到 C 的又一个新的有限开覆盖 $\{J''_j\}_{j=1}^{m''}$, 使 $\sum_{j=1}^{m''}|J''_j|^{p_0}\leqslant\sum_{j=1}^{m'}|J'_j|^{p_0}\leqslant\sum_{j=1}^{m}|J_j|^{p_0}$. 如果 $l_2=\min\{|J''_j|;j=1,2,\cdots,m''\}\geqslant\frac{1}{3}$，则证明已完成. 否则还可重复上述步骤. 注意 $l_1\geqslant 3l_0$, $l_2\geqslant 3l_1\geqslant 3^2l_0$，…. 所以上述作法在重复有限次后，所得出的区间中就必定至少有一个的长度不小于 1/3，从而完成整个证明.

上述例子说明了有 Hausdorff 维数大于零小于 1 的子集. 其实对于任意 $0<d<1$，都可作出 $\mathbf{R}^1$ 的子集 A 使 $d_H(A)=d$. 因为这时若令 $\xi=\exp\{-\log 2/d\}$, 则 $0<\xi<1/2$. 仿照 Cantor 集合的作法, 先从 $[0,1]$ 中去掉以 $\frac{1}{2}$ 为中心, 长度为 ξ 的一个开区间, 然后从余下的两个区间中各去掉一个以区间的中心为中心、长度与 ξ^2 的开区间，第三步从余下的四个区间中各去掉一个以区间的中心为中心长度为 ξ^3 的开区间, 依此递推, 最后得到的集合 A_ξ 的 Hausdorff 维数便是 $-\log 2/\log\xi=d$. 关于这点的证明完全可以仿照上述例子进行. 我们把它作为一个习题留给读者.

虽然都是 Lebesgue 零测度集，但却可以有不同的 Hausdorff 维数. 所以可以用 Hausdorff 维数来对 Lebesgue 零测度集作进一步的分类, 从而常常使对几乎处处成立的现象的研究得以深化.

以上我们谈的都是 $\mathbf{R}^1$ 上的情况. 其实对一般的 $\mathbf{R}^n$ 中的子集 A 及 $p>0$, 同样可以定义 A 的 p-维 Hausdorff 外测度，这只要

把定义中区间的长度换成圆球的直径. 这种高维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的 Hausdorff 测度,对研究 $\mathbf{R}^n$ 中的低维子集常常是有用的.

习　题

1. 试就 $\mathfrak{R}$ 为域，$\alpha(S)<+\infty$ 的情形证明 α 在 $\mathfrak{S}$（$\mathfrak{R}$）上的扩张是唯一的.

2. 证明 $\mathfrak{M}_p$ 是一 σ-域, H_p^* 在 $\mathfrak{M}_p$ 上是一测度.

3. 证明本节末尾所作的集合 A_ξ 的 Hausdorff 维数

$$d_H(A_\xi)=-\log 2/\log\xi.$$

第四章 可 测 函 数

为了引进新的积分，我们需要考察定义在n-维欧氏空间$\mathbf{R}^n$中的可测子集E上的函数，此处所说的函数都是指的单值实函数，不过我们也取$\pm\infty$为值. 我们规定

$$(+\infty)+(+\infty)=+\infty,\ (-\infty)+(-\infty)=-\infty.$$

对于任意实数a，都有$-\infty<a<+\infty$且规定

$$a+(+\infty)=+\infty,\ a+(-\infty)=-\infty,$$

而对于$b>0$，$c<0$，则规定

$$b\cdot(+\infty)=+\infty,\qquad b\cdot(-\infty)=-\infty,$$

$$c\cdot(+\infty)=-\infty,\qquad c\cdot(-\infty)=+\infty.$$

$$(+\infty)\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty,$$

$$(-\infty)\cdot(-\infty)=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty.$$

至于$(+\infty)-(+\infty)$，$(+\infty)+(-\infty)$，$(-\infty)-(-\infty)$，$(-\infty)+(+\infty)$，则认为是不被允许的运算. 在一般情况下，也不允许$0\cdot(\pm\infty)$.

§1 可测函数的定义及其简单性质

设E是$\mathbf{R}^n$中的一给定的可测点集，$\psi(x)$是在E上定义的函数，如果能将E分解为有限个互不相交的可测子集$E_1,E_2,\cdots,E_m$的并，使得在每一个E_i上，$\psi(x)$都恒等于一个常数c_i，则我们就说$\psi(x)$是E上的**简单函数**. 显然，定义于E上的函数$\psi(x)$是E上的简单函数的充要条件是存在E的有限多个可测子集$E_1,E_2,\cdots,E_m$及m个常数$c_1,c_2,\cdots,c_m$使在E上有

$$\psi(x)=\sum_{i=1}^{m}c_i\varphi_{E_i}(x),$$

此处 $\varphi_{E_i}(x)$是 E_i 的示性函数.

在新的积分理论中,简单函数应该认为是可积的,而如果我们希望新的积分在极限交换次序方面充分灵活，那自然该考察简单函数的极限(当然一般不再是简单函数)所构成的函数类. 因此我们引进下列概念.

定义 1 设E是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集，$f(x)$ 是在E上定义的非负函数,如果存在E 上的非负简单函数列$\{\psi_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$使

$$0\leqslant\psi_1(x)\leqslant\psi_2(x)\leqslant\cdots\leqslant\psi_m(x)\leqslant\cdots,$$

$$f(x)=\lim_{m\to\infty}\psi_m(x)\quad(x\in E),$$

则我们就说 $f(x)$ 是E 上的**非负可测函数**或说 $f(x)$ 在E上**非负可测**.

为了阐明函数的非负可测性的几何意义,我们引进下述概念:

定义 2 对于定义在 $\mathbf{R}^n$ 中的子集E 上的非负函数 $f(x)$，称 $\mathbf{R}^{n+1}$中的子集

$$\{(x,z);x\in E,0\leqslant z<f(x)\}$$

为 $f(x)$(在E上)的**下方图形**. 记为 $G(E;f)$. 当 $E=\mathbf{R}^n$ 时,还可简记为 $G(f)$.

例 如果 $\varphi_E(x)$是 $\mathbf{R}^n$ 中可测子集E的示性函数:

$$\varphi_E(x)=\begin{cases}1,\text{当 } x\in E,\\0,\text{当 } x\overline{\in} E,\end{cases}$$

则 $G(E,\ \varphi_E)=E\times[0,\ 1)$，$G(\varphi_E)=\mathbf{R}^n\times[0,\ 1)$，这都是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的可测集. 稍一般点,如果 $\psi(x)=\sum\limits_{i=1}^{m}c_i\varphi_{E_i}(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可

测集合 E 上的非负简单函数，则 $G(E;\psi)=\bigcup_{i=1}^{m}\{E_i\times[0,c_i)\}$，所以 $G(E;\psi)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的可测集合.

以下我们总假定 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一可测集合，并不再逐次声明.

定理 1 如果 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测子集 E 上的非负函数，则下述各款相互等价：

(i) $f(x)$ 在 E 上非负可测；

(ii) 对任意常数 a，$E[x;f(x)>a]=\{x;x\in E,f(x)>a\}$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集合；

(iii) $f(x)$ 在 E 上的下方图形 $G(E;f)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的可测集合.

证明 (i)⇒(ii). 设

$$f(x)=\lim_{m\to\infty}\psi_m(x),$$

其中 $\psi_m(x)=\sum_{i=1}^{k_m}c_i^{(m)}\varphi_{E_i^{(m)}}(x)$ 是 E 上的非负简单函数 $\psi_m(x)\leqslant\psi_{m+1}(x)$，$m=1,2,3,\cdots$，则对于任意 m，$E[x;\psi_m(x)>a]$ 都是一些 $E_i^{(m)}$ 的并，所以总是可测的，而

$$E[x;f(x)>a]=\bigcup_{m=1}^{\infty}E[x;\psi_m(x)>a].$$

因此 $E[x;f(x)>a]$ 是可测的.

(ii)⇒(iii) 将全部正有理数排成序列 $\{r_m\}_{m=1}^{\infty}$，令 $E_m=E[x;f(x)>r_m]$，$m\geqslant1$，则 E_m 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集，从而 $G_m=E_m\times[0,r_m)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的可测集. 当 $(x,z)\in G_m$ 时，$x\in E_m$，$0\leqslant z<r_m$，从而 $x\in E$，$0\leqslant z<r_m<f(x)$，所以 $(x,z)\in G(E;f)$，可见

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m \subset G(E;f).$$

另一方面，如果$(x,z)\in G(E;f)$，则$x\in E$，$0\leqslant z<f(x)$. 由有理数的稠密性，应有某一r_{m_0}使$z<r_{m_0}<f(x)$. 于是$x\in E[x;f(x)>r_{m_0}]=E_{m_0}$. 从而$(x,z)\in E_{m_0}\times[0, r_{m_0})=G_{m_0}\subset\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}G_m$. 总之$G(E;f)=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}G_m$，因而$G(E;f)$应是$\mathbf{R}^{n+1}$中的可测集.

(iii) $\Rightarrow$(i). 若$G(E;f)$是$\mathbf{R}^{n+1}$中的可测集，$a\geqslant 0$，则

$$E[x;f(x)>a]=\{x;x\in E,(x,a)\in G(E;f)\},$$

所以$E[x;f(x)>a]$是$G=G(E;f)$在$y=a$处的截口G^a. 由第三章§4定理3，几乎对所有的$a\geqslant 0$，$E[x;f(x)>a]$可测. 当然这种使$E[x;f(x)>a]$可测的a在$[0,+\infty)$上是稠密的，从而对任意的$a\geqslant 0$，都可以取一串$a_m\downarrow a$使$E[x;f(x)>a_m]$总可测，于是从

$$E[x;f(x)>a]=\bigcup_{m=1}^{\infty}E[x;f(x)>a_m],$$

便知$E[x;f(x)>a]$也可测. 注意到当$a<0$时，$E[x;f(x)>a]=E$及对任意a都成立的等式

$$E[x;f(x)\geqslant a]=\bigcap_{k=1}^{\infty}E\left[x;f(x)>a-\frac{1}{k}\right].$$

我们又可知对任意常数a，$E[x;f(x)\geqslant a]$也可测. 于是对于任意常数a,b，集合

$$E[x;a\leqslant f(x)<b]=E[x;f(x)\geqslant a]-E[x;f(x)\geqslant b]$$

也是可测的.

对于每一正整数m，及$k=0,1,\cdots,m2^m-1$，令

$$E_{m,k}=E\left[x;\frac{k}{2^m}\leqslant f(x)<\frac{k+1}{2^m}\right]$$

及

$$E_{m,m2^m}=E[x;f(x)\geqslant m],$$

则这是一些互不相交的可测集合，$E=\bigcup_{k=0}^{m2^m}E_{m,k}$. 定义简单函数

$$\psi_m(x)=\sum_{k=0}^{m2^m}\frac{k}{2^m}\varphi_{E_{m,k}}(x),$$

易见

$$\psi_m(x)\leqslant\psi_{m+1}(x)\quad(m\geqslant 1).$$

以下我们来证明$\lim_{m\to\infty}\psi_m(x)=f(x)$, $x\in E$.

如果 $x_0\in E$ 使 $f(x_0)=+\infty$, 则对一切 m, $x_0\in E_{m,m2^m}$, 所以

$$\psi_m(x_0)=\frac{m2^m}{2^m}=m\to+\infty=f(x_0);$$

如果 $f(x_0)\neq+\infty$, 则可取正整数 $m_0>f(x_0)$. 从而当 $m\geqslant m_0$ 时，

$$|f(x_0)-\psi_m(x_0)|=f(x_0)-\psi_m(x_0)<\frac{1}{2^m},$$

注意当 $m\to+\infty$ 时，$\frac{1}{2^m}\to 0$, 所以此时也有$\lim_{m\to\infty}\psi_m(x_0)=f(x_0)$. 证完.

上述定理说明E上的非负函数$f(x)$在E上非负可测等价于对任意常数 a, $E[x;f(x)>a]$都可测. 引伸这个思想，我们給出

定义 3 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集合E上的函数，如果对于任意常数 a, $E[x;f(x)>a]$都可测，则我们就说$f(x)$是 **E 上的可测函数**，或者说 **$f(x)$在 E 上可测**.

定理 2 对于 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集合E上的函数 $f(x)$，下述各条

件都是使 $f(x)$ 在 E 上可测的充要条件:

(i) 对任意常数 a, $E[x;f(x)\geqslant a]$ 都可测;

(ii) 对任意常数 a, $E[x;f(x)<a]$ 都可测;

(iii) 对任意常数 a, $E[x;f(x)\leqslant a]$ 都可测.

证明 因为

$$E[x;\ f(x)\geqslant a]=\bigcap_{k=1}^{\infty}E\left[x;f(x)>a-\frac{1}{k}\right],$$

$$E[x;f(x)<a]=E-E[x;f(x)\geqslant a],$$

$$E[x;\ f(x)\leqslant a]=\bigcap_{k=1}^{\infty}E\left[x;f(x)<a+\frac{1}{k}\right],$$

$$E[x;f(x)>a]=E-E[x;f(x)\leqslant a].$$

所以 $f(x)$ 可测 $\Rightarrow$(i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow f(x)$ 可测.

推论 1 如果 $f(x)$ 在 E 上可测, 则 $E[x;\ f(x)=+\infty]$ 和 $E[x;\ f(x)=-\infty]$ 都是可测集合.

证明 因为

$$E[x;\ f(x)=+\infty]=\bigcap_{n=1}^{\infty}E[x;f(x)>n],$$

$$E[x;\ f(x)=-\infty]=\bigcap_{n=1}^{\infty}E[x;f(x)<-n].$$

定理 3 如果两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在集合 E 上几乎处处相等, 则当其中的一个在 E 上可测时, 另一个也在 E 上可测.

证明 因为对于任意常数 a, $E[x;f(x)>a]$ 和 $E[x;\ g(x)>a]$ 都只能相差一个测度为零的点集, 所以当其中一个可测时, 另一个也可测. 证完.

定理 3 说明了在讨论函数的可测性时, 可以任意改变函数在一测度为零的子集上的值. 因此我们也可以允许所讨论的函数在

E 的一个测度为零的子集上没有定义.

定理 4 如果 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，E_0 是 E 的可测子集，则 $f(x)$ 也是 E_0 上的可测函数. 反之，如果已知 $f(x)$ 在每一个 E_i 上都可测，$i=1,2,3,\cdots$，则 $f(x)$ 也在 $E=\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 上可测.

证明 因为对任意常数 a 都有

$$E_0[x;f(x)>a]=E_0\cap E[x;f(x)>a],$$

$$E[x;\ f(x)>a]=\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i[x;f(x)>a].$$

定理 5 如果两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 E 上可测，则

(i) $cf(x)$ 在 E 上可测 $(c\in \mathbf{R}^1)$;

(ii) 当 $f(x)+g(x)$ 在 E 上几乎处处有意义时，$f(x)+g(x)$ 在 E 上可测;

(iii) 当 $f(x)g(x)$ 在 E 上几乎处处有意义时，$f(x)g(x)$ 在 E 上可测.

证明 (i) 若 $c=0$，则 $cf(x)\equiv 0$ 自然在 E 上可测，若 $c\neq 0$，则对任意常数 a,

$$E[x;\ cf(x)>a]=\begin{cases} E[x;f(x)>c^{-1}a], & c>0, \\ E[x;f(x)<c^{-1}a], & c<0. \end{cases}$$

因此 $cf(x)$ 在 E 上可测.

(ii) 不妨设 $f(x)+g(x)$ 在 E 上处处有意义. 将全体有理数排成序列 $\{r_i\}$. 对于任意常数 a,

$$E[x;f(x)+g(x)>a]=E[x;f(x)>a-g(x)]$$

$$=\bigcup_{i=1}^{\infty} E[x;f(x)>r_i>a-g(x)]$$

$$=\bigcup_{i=1}^{\infty}(E[x;f(x)>r_i]\cap E[x;a-g(x)<r_i])$$

$$=\bigcup_{i=1}^{\infty}(E[x;f(x)>r_i]\cap E[x;g(x)>a-r_i]).$$

$E[x;f(x)>r_i]$, $E[x;g(x)>a-r_i]$都是可测集合，所以$E[x;f(x)+g(x)>a]$也是可测集合.

(iii) 令

$$E_1=(E[x;f(x)=+\infty]\cap E[x;g(x)=+\infty])\cup(E[x;f(x)=-\infty]\cap E[x;g(x)=-\infty]),$$

$$E_2=(E[x;f(x)=+\infty]\cap E[x;g(x)=-\infty])\cup(E[x;f(x)=-\infty]\cap E[x;g(x)=+\infty]).$$

由推论 1 知E_1,E_2都是E的可测子集. 在E_1上$f(x)g(x)\equiv+\infty$，在E_2上$f(x)g(x)\equiv-\infty$，所以$f(x)g(x)$在E_1,E_2上都是可测的. 于是我们只要证明$f(x)g(x)$在$E_3=E-(E_1\cup E_2)$上可测即可. 在E_3上$h_1(x)=f(x)+g(x)$，$h_2(x)=f(x)-g(x)$处处有定义，由定理 4 及已证明了的 (i)和(ii)，$h_1(x)$，$h_2(x)$都是E_3上的可测函数. 注意

$$E_3[x;h_i^2(x)>a]=\begin{cases}E_3, & a<0,\\ E_3[x;h_i(x)>\sqrt{a}]\cup E_3[x;h_i(x)<-\sqrt{a}], & a\geqslant 0.\end{cases}$$

所以$h_i^2(x)(i=1,2)$也都是E_3上的可测函数. 于是

$$f(x)g(x)=\frac{1}{4}[h_1^2(x)-h_2^2(x)].$$

便也是E_3上的可测函数. 证完.

定理 6 如果$\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$是$E$上的可测函数序列，则

(i) $h(x)=\sup\limits_{m\geqslant1}f_m(x)$，$l(x)=\inf\limits_{m\geqslant1}f_m(x)$ 都是E上的可测

函数；

(ii) $U(x)=\limsup_{m\to\infty} f_m(x)$, $V(x)=\liminf_{m\to\infty} f_m(x)$ 都是E上的可测函数.

证明 对于任意常数 a,

$$E[x;\ h(x)>a]=\bigcup_{m=1}^{\infty} E[x; f_m(x)>a],$$

所以 $h(x)$是在E上可测的. 又

$$l(x)=-\sup_{m\geq 1}(-f_m(x)),$$

所以 $l(x)$也在E上可测. 最后

$$U(x)=\inf_{m\geq 1}\ \sup_{k\geq 0}\ f_{m+k}(x),$$

$$V(x)=\sup_{m\geq 1}\ \text{iuf}_{k\geq 0}\ f_{m+k}(x),$$

因而从(i)知, $U(x)$, $V(x)$都是E上的可测函数.

推论 2 如果E上的可测函数序列$\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$在$E$上几乎处处趋于 $f(x)$, 即

$$f(x)=\lim_{m\to\infty} f_m(x) \quad \text{a.e. 于 } E,$$

则 $f(x)$在E上可测.

对于在点集E上定义的函数 $f(x)$, 规定 $f(x)$的**正部**和**负部**分别为:

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\},$$

与

$$f^-(x)=\max\{-f(x),0\},$$

则 $f^+(x)$和$f^-(x)$都是E上的非负函数. 由定理 6 的 (i), 当$f(x)$在E上可测时 $f^+(x)$和$f^-(x)$都是E上的可测函数. 另一方面,

$$f(x)=f^+(x)-f^-(x),$$

$$|f(x)|=f^+(x)+f^-(x).$$

因此当 $f^+(x)$ 和 $f^-(x)$ 都在 E 上可测时 $f(x)$ 和 $|f(x)|$ 也在 E 上可测．这也就是说我们有下述

定理 7 $f(x)$ 在 E 上可测的充要条件是 $f^+(x)$ 和 $f^-(x)$ 都在 E 上(非负)可测．当 $f(x)$ 在 E 上可测时，$|f(x)|$ 也在 E 上可测．

定理 8 如果 $f(x)$ 在 E 上可测，并且规定 $f(x)=0$ 时，$\frac{1}{f(x)}=+\infty$，$f(x)=\pm\infty$ 时，$\frac{1}{f(x)}=0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 也是 E 上的可测函数．

证明 令 $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ 由

$$E_0=E[x;\ f(x)=0]=\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(E[x;\ f(x)\geqslant 0]\cap E\left[x;f(x)<\frac{1}{k}\right]\right),$$

知 E_0 是 E 的可测子集．又

$$E[x;\ g(x)<a]$$
$$=\begin{cases} E_0\cup E\left[x;0<f(x)<\frac{1}{a}\right], & \text{当}\ a>0, \\ E_0\cup E[x;f(x)>0], & \text{当}\ a=0, \\ E_0\cup E[x;f(x)>0]\cup E\left[x;f(x)<\frac{1}{a}\right], & \text{当}\ a<0, \end{cases}$$

所以 $E[x;\ g(x)>a]$ 对任意常数 a 都是可测的，即 $g(x)$ 在 E 上可测．

习　题

1．证明 E 上两个简单函数的和与乘积都还是 E 上的简单函数．

2．证明当 $f(x)$ 既是 E_1 上又是 E_2 上的非负可测函数时，$f(x)$ 也是 $E_1\cup E_2$ 上的非负可测函数．

3．设 $mE<+\infty$，$f(x)$ 是 E 上的几乎处处有限的非负可测函数，证明对任意 $\varepsilon>0$，都有闭集 $F\subset E$，使 $m(E-F)<\varepsilon$，而在 F 上 $f(x)$ 是有界的．

4．设 $\{f_n(x)\}$ 是可测集合 E 上的非负可测函数序列．证明：如果对任

意 $\varepsilon>0$，都有 $\sum_{n=1}^{\infty} mE[x;f_n(x)>\varepsilon]<+\infty$，则必有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0 \quad \text{a. e. 于} E.$$

又问这一命题的逆命题是否成立？

5. 设 $mE<+\infty$，$f(x)$ 在 E 上非负可测，证明对于任意 y，$E_y\triangleq E[x;f(x)=y]$ 都是可测的，进而证明使 $mE_y>0$ 的 y 最多有可数多个.

6. 证明如果 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 的任何可测子集 E 上都可测.

7. 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的可测子集 E 上的单调函数，证明 $f(x)$ 在 E 上可测.

8. 证明 $\mathbf{R}^n$ 中可测子集 E 上的函数 $f(x)$ 可测的充要条件是存在 E 上的一串简单函数 $\psi_m(x)$，使

$$f(x)=\lim_{m\to\infty}\psi_m(x)\,(x\in E).$$

9. 证明：当 $f_1(x)$ 是 $E_1\subset\mathbf{R}^p$，$f_2(y)$ 是 $E_2\subset\mathbf{R}^q$ 中的可测函数，且 $f_1(x)\cdot f_2(y)$ 在 $E=E_1\times E_2$ 上几乎处处有意义时，$f_1(x)f_2(y)$ 是 E 上的可测函数.

10. 证明：如果 $f(x)$ 是定义于 $\mathbf{R}^n$ 上的可测子集 E 上的函数，则 $f(x)$ 在 E 上可测的充要条件是对 $\mathbf{R}^1$ 中任意 Borel 集合 B，

$$f^{-1}(B)\triangleq E[x;f(x)\in B]$$

都是 E 的可测子集，如果 $f(x)$ 还是连续的，则 $f^{-1}(B)$ 还是 Borel 集.（提示：用 $\mathfrak{B}_1$ 表 $\mathbf{R}^1$ 中那些使 $f^{-1}(B)$ 是 E 的可测子集的 B 所构成的集合族，比较 $\mathfrak{B}_1$ 和 $\mathbf{R}^1$ 的 Borel 集合类 $\mathfrak{B}$.）

11. 设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，$g(y)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数. 证明 $g[f(x)]$ 是 E 上的可测函数.（注意：如果 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续，$g(y)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上可测，$g[f(x)]$ 未必可测. 特别是 $f(x)$，$g(y)$ 都可测时 $g[f(x)]$ 未必可测.）

12. 证明：如果 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的可微函数，则

$$\frac{\partial}{\partial x_i}f(x_1,\cdots,x_n),\ i=1,2,\cdots,n$$

都是 $\mathbf{R}^n$ 上的可测函数.

§2 Egoroff 定理

在数学分析中，我们不止一次地遇到过一致收敛的概念. 在

讨论连续函数列的极限函数的连续性时，在讨论逐项积分、逐项微分等问题时，都出现过要求一致收敛的条件．另外我们也知道即使函数列$\{f_n(x)\}$处处收敛于$f(x)$，$f_n(x)$也可能不一致收敛于$f(x)$．例如$f_n(x)=x^n$在$(0,1)$上处处收敛于0，但是它并不是一致收敛．不过不难看出对于任意正数ε，我们只要从$(0,1)$中去掉一个长为ε的小区间$(1-\varepsilon,1)$，便能使$f_n(x)$在余下的点集上具有一致收敛性．这就是说，当函数列在E上不一致收敛的时候，我们仍然有可能从E中去掉一个"很小"的点集e，使在$E-e$上函数列是一致收敛的．这就是下述Egoroff定理．

定理1 (Egoroff定理) 设

(1) $mE<+\infty$，$\{f_n(x)\}$是E上的一串几乎处处取有限值的可测函数，

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$a.e.于$E$，且$|f(x)|<+\infty$a.e.，

则于任意正数δ，恒有可测子集e，使$me<\delta$，而在$E_\delta=E-e$上$\{f_n(x)\}$一致地收敛于$f(x)$．

为了证明Egoroff定理，我们先证明下述引理：

引理 设$\{f_n(x)\}$是E上的一串只取有限值的函数，$f(x)$是在E上定义的只取有限值的函数，则所有使$f_n(x)$不收敛到$f(x)$的点x所作成的集合D，可以表成

$$D=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}E[x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k] \qquad (*)$$

的形式，其中$\varepsilon_1>\varepsilon_2>\cdots>\varepsilon_k>\cdots$是任意一串单调地趋于零的正数．

证明 设$x_0\in D$，即$\{f_n(x_0)\}$不以$f(x_0)$为极限，因此应有$\varepsilon>0$，及一串正整数

$$n_1<n_2<n_3<\cdots<n_i<\cdots\to\infty$$

使 $$|f_{n_i}(x_0)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon.$$
自然，只要 k 充分大，就有
$$|f_{n_i}(x_0)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_k,$$
所以
$$x_0\in\bigcup_{n=N}^{\infty}E[x;|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k]\quad(N=1,2,3,\cdots)$$
从而
$$x_0\in\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}E[x;|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k].$$
于是
$$x_0\in\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}E[x;|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k].$$
反之，设 $x_0\in\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}E[x;|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k]$，则有 k_0 使
$$x_0\in\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}E[x;|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_{k_0}],$$
所以对任意正整数 N，
$$x_0\in\bigcup_{n=N}^{\infty}E[x;|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_{k_0}].$$
可见对任意正整数 N 恒有 $n_N\geqslant N$，使
$$|f_{n_N}(x_0)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_{k_0}.$$
这证明 $\{f_n(x_0)\}$ 不收敛于 $f(x_0)$，亦即 $x_0\in D$. (*)式得证.

现在我们来证明 Egoroff **定理** 从假设，使 $f(x)$, $f_1(x)$, $\cdots$, $f_n(x)$, $\cdots$中至少有一个在该点的值为无穷的点 x 构成一测度为零的点集. 我们可以先将它从 E 中去掉，然后在余下的集合上讨论.

所以我们不妨假设 $f(x)$ 和各 $f_i(x)$ 都是在 E 上处处有限的. 我们要证明的是对事先任意给定的 $\delta>0$，都可以从 E 中去掉一个测度小于 δ 的集合 e，使在 $E-e$ 上，$\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$，这也就是说要使之对任意 $\varepsilon>0$，都能有 N 使 $n>N$ 时，$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ 对一切 $x\in E-e$ 都成立. 显然，如果 $\{\varepsilon_k\}$ 是一串下降于零的正数，则上述要求只要能对每一 ε_k 都满足就可以了.

既然要的是在 $E-e$ 上 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon_k(n\geqslant N_k)$，集合

$$e_k=\bigcup_{n=N_k}^{\infty}E[x;\ |f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k]$$

中的点自然应当去掉，此处 N_k 是一个正整数.

如果对于每一个 ε_k 我们都用 e_k 来表示上述的集合，$e=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}e_k$，则在 $E-e$ 上 $f_n(x)$ 必定一致地收敛于 $f(x)$. 因为于任意 $\varepsilon>0$，总有 $\varepsilon_k<\varepsilon$. 于是当 $n\geqslant N_k$ 时，如果 $x\in E-e$，则 $x\,\overline{\in}\,e_k$. 所以

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon_k<\varepsilon.$$

因此，如果我们用上述的方法去掉 e，则显然 $\{f_n(x)\}$ 在 $E-e$ 上一致收敛于 $f(x)$. 问题在于如何保证 $me<\delta$; 注意到在上述过程中，我们对 N_k 并没有作任何限制，因此我们自然可以取 N_k 充分地大，以使 me_k 充分地小.

因为 $f_n(x)$ 不趋于 $f(x)$ 的点所作成的集合是

$$D=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n\geqslant N}E[x;\ |f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k],$$

而 $f_n(x)\xrightarrow{\text{a.e.}}f(x)$，所以，$mD=0$，从而

$$m\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n\geqslant N}E[x;\ |f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k]=0,$$

由第三章，§2，定理 5 便得

$$\lim_{N\to\infty} m \bigcup_{n=N}^{\infty} E[x; |f_n(x)-f(x)|\geqslant \varepsilon_k]=0.$$

可见只要 N_k 取得充分地大，我们便确实可以使 me_k 充分地小，比如小于$\frac{\delta}{2^k}$，对于每一个 k，我们都这样去定 N_k，则于 $e=\bigcup_{k=1}^{\infty} e_k$，有

$$me=m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} e_k\right)\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} me_k<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^k}=\delta.$$

至此定理得证.

注意 对 $E_\delta\triangleq E-e$ 有 $mE_\delta=mE-me>mE-\delta$，故定理也可叙述为：有 $E_\delta\subset E$ 使 $mE_\delta\geqslant mE-\delta$，而$\{f_n(x)\}$在 E_δ 上一致收敛于$f(x)$.

上述定理首先为俄国的数学家 Egoroff 所发现，发表于巴黎科学院报告上①. 它说明几乎处处收敛与一致收敛的关系. 同时这个定理也常常成为处理极限问题的有力工具，因为通过 Egoroff 定理，可以对不一致收敛的函数列部分地“恢复”一致收敛性. 而一致收敛性却是我们久已熟习的. 下一节在讲可测函数的构造时，就要利用 Egoroff 定理来考虑有关连续性的问题(见下节 Lusin 定理的证明).

习　题

1. 举例说明 Egoroff 定理中的条件 $mE<+\infty$ 一般说来是不能取消的.

2. 设 $mE<+\infty$，$f_n(x)$，$n=1,2,3,\cdots$都是 E 上的几乎处处有限的可测

① Comptes Rendus, Academie des Sciences, Paris, 152(1911).

函数，并且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ a. e.，证明必有 E 的可测子集序列 $\{E_n\}$，使 $E_n\subset E_{n+1}, n=1,2,\cdots$,

$$\lim_{n\to\infty} mE_n=mE,$$

而在每一 E_n 上，$\{f_n(x)\}$ 都一致收敛于零.

3. 设 $mE<+\infty, f_n(x)$ 是 E 上的几乎处处有限的可测函数，$n=1,2,3,\cdots$. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ a.e. 于 E，证明必有 $\{f_n(x)\}$ 的子序列 $\{f_{n_i}(x)\}$，使 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_{n_i}(x)$ 在 E 上几乎处处绝对收敛. 进而证明有非负实数序列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$，使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n=+\infty$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |t_n f_n(x)|<+\infty$ a. e. 于 E.（提示：注意第三章 § 2 习题的第 9 题及集合序列上极限的定义）

4. 取消上题中 $mE<+\infty$ 的限制.

§ 3 可测函数的结构 Lusin定理

前面已经说过，我们今后所要研究的函数是可测函数，也就是能表成一串简单函数的极限的函数，或者说对于任意常数 a，点集 $E[x; f(x)>a]$ 都可测的函数. 连续函数、单调函数都是可测函数（见 § 1 习题的第 6 题和第 7 题），Dirichlet 函数，Riemann 函数（二者都不连续！）也都是可测函数. 其实我们一般常见的函数也都是可测函数，所以可测函数类比连续函数类更为广泛. 不过，另一方面，Lusin 证明了可测函数与连续函数之间还是有很密切的关系的.

由于现在我们考虑的是一般的点集上的函数，所以我们得先把连续函数的定义加以扩充.

定义 1 设 E 是一点集，$f(x)$ 是定义在 E 上的函数，$x_0\in E$. 如果对于任意 $\varepsilon>0$，恒存在 $\delta>0$，使 $x\in E\cap N(x_0,\delta)$ 时，

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$在 x_0 点相对于 E 连续. 此处 $N(x_0, \delta)$ 表示以 x_0 为心，以 δ 为半径的邻域.

显然，如果 x_0 是 E 的孤立点，即有 $\delta>0$, 使 $N(x_0, \delta)$ 中除了 x_0 以外再没有其他属于 E 的点，则 $f(x)$ 一定在 x_0 点相对于 E 连续.

定义 2 如果对于每一 $x\in E$, $f(x)$都在 x 点相对于 E 连续，我们就说 $f(x)$是 E 上的**连续函数**；或者说把 $f(x)$看作 E 上的函数时是处处连续的.

定理 1 (Lusin 定理) 设 E 是一测度有限的可测集①, $f(x)$ 是 E 上的几乎处处有限的可测函数，则于任意 $\varepsilon>0$, 恒有闭集 $F\subset E$, 使

(1) $m(E-F)<\varepsilon$,

(2) $f(x)$是 F 上的连续函数.

证明 因为可测函数都是简单函数的极限，因此我们先考虑简单函数.

设 $f(x)$是简单函数，$f(x)=c_i$, 当 $x\in E_i$ $(i=1, 2, \cdots, n;$ $E=\bigcup_{i=1}^{n} E_i)$. 此处 E_i 是一些互不相交的可测集合. 据第三章 §3 习题的第 2 题，对每一个 i, 有闭集 $F_i\subset E_i$ 使 $m(E_i-F_i)<\frac{\varepsilon}{n}$. 令 $F=\bigcup_{i=1}^{n} F_i$, 则 F 是闭集, $F\subset E$,

$$m(E-F)=m\bigcup_{i=1}^{n}(E_i-F_i)<\varepsilon.$$

而 $f(x)$ 是 F 上的连续函数. 事实上，设 $x_0\in F$, 则有 $i_0\leqslant n$, 使

① $mE<+\infty$的限制是可以取消的.

$x_0\in F_{i_0}$，注意 F_i 是一些互不相交的闭集，所以有 $d>0$，使

$$\rho(x_0,F_i)>d \quad (i\neq i_0).$$

故 $N(x_0,d)\cap F_i=\varnothing\,(i\neq i_0)$，从而 $F\cap N(x_0,d)=F_{i_0}\cap N(x_0,d)$，可是 $f(x)$ 在 F_{i_0} 上是一常数 c_{i_0}，故有所欲证者.

如果 $f(x)$ 是一般的可测函数．不妨设 $f(x)\geqslant 0$．于是有一串非负的简单函数 $\varphi_n(x)\to f(x)$．据 Egoroff 定理，有 $E_\delta\subset E$，使 $m(E-E_\delta)<\frac{\varepsilon}{2}$，而在 E_δ 上 $\varphi_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

根据前段证明，对每一个 $\varphi_n(x)$ 都有闭集 $F_n\subset E_\delta$，使

$$m(E_\delta-F_n)<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}},$$

并且 $\varphi_n(x)$ 是 F_n 上的连续函数．令 $F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$，则 F 是闭集，并且 $F\subset E_\delta\subset E$，

$$m(E_\delta-F)=m\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_\delta-F_n)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$m(E-F)\leqslant m(E-E_\delta)+m(E_\delta-F)<\varepsilon.$$

在 F 上，每一个 $\varphi_n(x)$ 都连续，所以 $f(x)$ 也连续（因为在 F 上，$\varphi_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$）．定理证完.

上述证明方法值得特别注意：先考虑简单函数然后再往一般的可测函数过渡，这是在许多场合下都行之有效的办法．另外在这个证明中，Egoroff 定理的运用也是可注意的.

定理 2 若 E 是一维空间 $\mathbb{R}^1$ 上的有界可测集合①，$E\subset(a,b)$，$f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数，则于任意 $\varepsilon>0$，有闭集

---

① 有界的条件不是必须的.

$F\subset E$，及在整个直线上连续的函数 $g(x)$ 使

(1) 当 $x\in F$ 时，$f(x)=g(x)$，

(2) $m(E-F)<\varepsilon$.

如果 $|f(x)|\leqslant M\ (x\in E)$，则还可要求 $|g(x)|\leqslant M$.

证明 由定理 1，有闭集 $F\subset E$，使 $m(E-F)<\varepsilon$，而 $f(x)$ 是 F 上的连续函数，因此问题在于扩张 F 上的 $f(x)$，使其在整个空间上连续.

F 是有界闭集，因此是从一闭区间 $[c,d]\subset(a,b)$ 中去掉有限个或可数多个互不相交的开区间而成，设这些开区间是 (c_i, d_i)，现在我们定义一个函数 $g(x)$，使

$$g(x)=\begin{cases}0 & \text{当 } x\leqslant a \text{ 或 } x\geqslant b \text{ 时},\\ f(x) & \text{当 } x\in F \text{ 时}.\end{cases}$$

此外，当 $x\in(c_i,d_i)$ 时，令 $g(x)$ 的图形是联 $(c_i,f(c_i))$，$(d_i,f(d_i))$ 的直线，当 $x\in(a,c)$ 及 (d,b) 时，分别是联 $(a,0)$，$(c,f(c))$ 及 $(b,0)$，$(d,f(d))$ 的直线，于是 $g(x)$ 是整个直线上的连续函数，且满足定理的各项要求.

定理 2 中要求 E 是属于一维空间的点集，显然这个限制并不是必要的，只要我们知道如何把一个 n 维空间中的有界闭集 F 上的连续函数扩张到整个空间上去，定理 2 也立即可以推广到 n 维空间. 关于这种推广有界闭集 F 上的连续函数到整个空间上去的方法，大家可以阅读参考书①.

如果注意到，对于任意闭集 F，总可以作一完备集 $P\subset F$，使 $mP=mF$，则显然定理 1 及 2 中之闭集尚可要求是完备集.

Lusin 定理揭露了可测函数与连续函数的关系. 使我们对可

---

① L. M. Graves, The Theory of Functions of Real Variables, 1946, Chicago, 第 116—118 页，或周民强，《实变函数》，北京大学出版社，1985 年，第 50—51 页.

测函数的结构能有进一步的了解．另外 Lusin 定理在应用上也很重要．通过它，我们常常能把有关一般的可测函数的问题化成有关连续函数的问题，从而得到简化．

习　题

1．若 E 是有界可测集，$f(x)$ 在 E 上几乎处处有限，则 $f(x)$ 可测的充要条件是有一串在整个空间上连续的函数 $\Phi_n(x)$，使

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(x)=f(x)\ \text{a.e. 于}\ E.$$

试就空间维数为一时证明之．

2．证明有界闭集上的任何连续函数都是有界的．

§4　依测度收敛

在本节中我们要针对可测函数序列引进一种有广泛应用的新的收敛概念．我们先证明下述定理：

定理 1(Lebesgue 定理)　设

(1) E 是测度有限的可测集合；

(2) $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ 都是 E 上的几乎处处取有限值的可测函数；

(3) $f(x)$ 在 E 上几乎处处有限，且

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\quad \text{a.e. 于}\ E,$$

则对于任意 $\sigma>0$，都有

$$\lim_{n\to\infty}mE[x;|f(x)-f_n(x)|\geqslant\sigma]=0.$$

证明　由 Egoroff 定理，对于任意 $\varepsilon>0$，都有 E 的可测子集 e，使 $me<\varepsilon$，而在 $E-e$ 上，$f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$．如果 $\sigma>0$ 已给定，则可取 N，使 $n\geqslant N$ 时，对一切 $x\in E-e$ 都有

$$|f(x)-f_n(x)|<\sigma.$$

因此 $n\geqslant N$ 时，$E[x;|f(x)-f_n(x)|\geqslant\sigma]\subset e$．从而

$$mE[x;\ |f(x)-f_n(x)|\geqslant\sigma]\leqslant me<\varepsilon.$$

这正是我们所需要证明的结论.

例 设 $E=[0,1)$. 定义

$f_1^{(1)}(x)=1,$

$$f_1^{(2)}(x)=\begin{cases}1, & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right),\\ 0, & x\in\left[\frac{1}{2},1\right),\end{cases}\quad f_2^{(2)}(x)=\begin{cases}0, & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right),\\ 1, & x\in\left[\frac{1}{2},1\right).\end{cases}$$

一般来讲,将[0,1)分为 k 等分,我们就定义第 k 组的 k 个函数为

$$f_i^{(k)}(x)=\begin{cases}1, & x\in\left[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}\right),\\ 0, & x\overline{\in}\left[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}\right).\end{cases}\qquad (i=1,2,\cdots,k),$$

也就是说定义 $f_i^{(k)}(x)$ 为那样的函数,它在从左边数起的第 i 个小区间上恒等于 1,而在其他地方则恒等于 0.

令

$$\varphi_1(x)=f_1^{(1)}(x),\varphi_2(x)=f_1^{(2)}(x),\varphi_3(x)=f_2^{(2)}(x),$$
$$\varphi_4(x)=f_1^{(3)}(x),\varphi_5(x)=f_2^{(3)}(x),\varphi_6(x)=f_3^{(3)}(x),$$

………………

则 $\{\varphi_n(x)\}$ 是在[0,1) 上有定义的处处取有限值的可测函数. 令 $\varphi(x)\equiv 0$,则于任意 $\sigma>0$,如果 $\sigma>1$,则 $E[x;\ |\varphi_n(x)-\varphi(x)|\geqslant\sigma]=0$. 自然有

$$\lim_{n\to\infty} mE[x;\ |\varphi_n(x)-\varphi(x)|\geqslant\sigma]=0,$$

若 $\sigma\leqslant 1$, 则在 $\varphi_n(x)$ 是第 k 组中之第 i 个函数时,$E[x;\ |\varphi_n(x)-\varphi(x)|\geqslant\sigma]=\left[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}\right)$,所以

$$mE[x;\ |\varphi_n(x)-\varphi(x)|\geqslant\sigma]=\frac{1}{k},$$

当 $n\to\infty$ 时，当然 $k\to\infty$，故

$$\lim_{n\to\infty} mE[x;\ |\varphi_n(x)-\varphi(x)|\geqslant\sigma]=0,$$

这说明对于这串函数 φ_n 和 φ 来说，定理 1 中的结论是成立的. 但是对于任意 $x_0\in[0,1)$，$\{\varphi_n(x)\}$ 中都有无穷多个函数在该点等于零，也都有无穷多个函数在该点等于 1，所以 $\{\varphi_n(x_0)\}$ 不可能有极限. 因此 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[0,1)$ 上处处不收敛于 $\varphi(x)$.

上述例子表明定理 1 中所说的结论是比几乎处处收敛要弱的性质. 因此我们给出下述定义:

定义 1 设 E 是可测集，$f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots$ 都是在 E 上几乎处处取有限值的可测函数，如果对于任意 $\sigma>0$，都有

$$\lim_{n\to\infty} mE[x;\ |f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma]=0,$$

则我们就说 $f_n(x)$ 在 E 上**依测度收敛**于 $f(x)$. 记为 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$ 于 E.

于是上述 Lebesgue 定理就是说当 $mE<+\infty$ 时，从 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ a.e. 于 E，可推出 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$ 于 E. 而上述例子则表明从 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$ 于 E，不能推出在 E 上 $f_n(x)$ 几乎处处收敛于 $f(x)$. 但是下述事实常常是有用的.

定理 2（F. Riesz 定理） 如果 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$ 于 E，则必有 $\{f_n(x)\}$ 的子序列 $\{f_{n_i}(x)\}$，使 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_{n_i}(x)$ a.e. 于 E.

证明 先考虑 $mE<+\infty$ 的情形. 我们的任务是要选一串在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$ 的子序列. 由 §2 的引理，就是要选一串正整数

$$n_1<n_2<\cdots<n_i<\cdots$$

使

$$m\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{i=N}^{\infty}E\left[x;\ |f(x)-f_{n_i}(x)|\geqslant\frac{1}{k}\right]=0.$$

这也就是说要对任意的 k，都有

$$m\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{i=N}^{\infty}E\left[x;\ |f(x)-f_{n_i}(x)|\geqslant\frac{1}{k}\right]=0.$$

注意 $mE<+\infty$，$\bigcup_{i=N}^{\infty}E\left[x;\ |f(x)-f_{n_i}(x)|\geqslant\frac{1}{k}\right]$可测且

$$\bigcup_{i=N}^{\infty}E\left[x;\ |f(x)-f_{n_i}(x)|\geqslant\frac{1}{k}\right]$$

$$\supset\bigcup_{i=N+1}^{\infty}E\left[x;\ |f(x)-f_{n_i}(x)|\geqslant\frac{1}{k}\right].$$

上述条件就是要将 n_i 选得充分大，使得对任意的 k 都有

$$\lim_{N\to\infty}m\bigcup_{i=N}^{\infty}E\left[x;\ |f(x)-f_{n_i}(x)|\geqslant\frac{1}{k}\right]=0.$$

注意

$$m\bigcup_{i=N}^{\infty}E\left[x;\ |f(x)-f_{n_i}(x)|\geqslant\frac{1}{k}\right]$$

$$\leqslant\sum_{i=N}^{\infty}mE\left[x;\ |f(x)-f_{n_i}(x)|\geqslant\frac{1}{k}\right].$$

上式右边是一数值级数的余项．所以如果我们能将$\{n_i\}$选得使对于任意的 k，级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}mE\left[x;\ |f(x)-f_{n_i}(x)|\geqslant\frac{1}{k}\right]$$

都收敛，则问题即已解决．根据正项级数收敛判别的比较原理，只要将$\{n_i\}$选得使对任意 k，都在 i 充分大时有

$$mE\left[x;\ |f(x)-f_{n_i}(x)|\geqslant\frac{1}{k}\right]\leqslant\frac{1}{2^i}\qquad(*)$$

就可以了．根据 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$于E的假设，对于固定的 k，这样的 n_i 当然是可以选出来的．为了要照顾到使上述事实能对任意 k 都

成立，对于每一 i，我们选 n_i 如此地大，使

$$mE\left[x;\ |f(x)-f_{n_i}(x)|\geqslant\frac{1}{i}\right]\leqslant\frac{1}{2^i},$$

当然，我们还可以要求

$$n_1<n_2<\cdots<n_i<\cdots,$$

于是 $\{f_{n_i}(x)\}$ 便一定在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$. 事实上，对于任意 k，只要 $i>k$，便有 $\frac{1}{i}<\frac{1}{k}$，于是

$$mE\left[x;\ |f(x)-f_{n_i}(x)|\geqslant\frac{1}{k}\right]$$

$$\leqslant mE\left[x;\ |f(x)-f_{n_i}(x)|\geqslant\frac{1}{i}\right]\leqslant\frac{1}{2^i}$$

所以(*)式确实是成立的，于是

$$\sum_{i=1}^{\infty}E\left[x;\ |f(x)-f_{n_i}(x)|\geqslant\frac{1}{k}\right]$$

确实总是收敛的.

现在考虑 $mE=+\infty$ 的情形. 令

$$\bar{I}_m=\{x=(x_1,\cdots,x_n);\ |x_i|\leqslant m,\ i=1,\cdots,n\},$$

$E_m=E\cap\bar{I}_m$，则 E_m 是测度有限的可测集合，而且 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$ 于 $E_m(m=1,2,3,\cdots)$. 于是由前段证明有 $\{f_n(x)\}$ 的子序列

$$f_1^{(1)}(x),f_2^{(1)}(x),\cdots,f_i^{(1)}(x),\cdots$$

使 $f(x)=\lim\limits_{i\to\infty}f_i^{(1)}(x)$ a.e. 于 E_1. 显然此时仍有 $f_i^{(1)}(x)\Rightarrow f(x)$ 于 $E_m(m=2,\ 3,\ \cdots)$. 于是根据同样的道理又有 $\{f_i^{(1)}(x)\}$ 的子序列 $\{f_i^{(2)}(x)\}$，使 $f(x)=\lim\limits_{i\to\infty}f_i^{(2)}(x)$ a.e. 于 E_2. 依此类推，由归纳法便可作出：

$$f_1^{(1)}(x),f_2^{(1)}(x),\cdots,f_i^{(1)}(x),\cdots$$

$$f_1^{(2)}(x),f_2^{(2)}(x),\cdots,f_i^{(2)}(x),\cdots$$

$$\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots$$

$$f_1^{(k)}(x),f_2^{(k)}(x),\cdots,f_i^{(k)}(x),\cdots$$

$$\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,$$

使后一序列都是前一序列的子序列，且

$$f(x)=\lim_{i\to\infty}f_i^{(k)}(x)\ \text{a.e.于}\ E_k.$$

设$\{f_{n_i}(x)\}$是上述“无穷矩阵”中的对角线序列，即

$$f_{n_i}(x)=f_i^{(i)}(x),\ i=1,2,3,\cdots,$$

则$\{f_{n_i}(x)\}$当然还是$\{f_n(x)\}$的子序列. 易见这时必有$f(x)=\lim\limits_{i\to\infty}f_{n_i}(x)$ a.e.于E. 证完.

关于依测度收敛我们还可以证明：

定理3 设$f_n(x)\Rightarrow f(x)$于E，$f_n(x)\Rightarrow g(x)$于E，则$f(x)=g(x)$ a.e.于E.

证明 因为

$$|f(x)-g(x)|\leqslant|f(x)-f_k(x)|+|f_k(x)-g(x)|,$$

故由反证法可知对于任意正整数n，

$$E\left[x;|f(x)-g(x)|\geqslant\frac{1}{n}\right]\subset E\left[x;|f(x)-f_k(x)|\geqslant\frac{1}{2n}\right]\cup E\left[x;|f_k(x)-g(x)|\geqslant\frac{1}{2n}\right],$$

从而

$$mE\left[x;|f(x)-g(x)|\geqslant\frac{1}{n}\right]\leqslant mE\left[x;|f(x)-f_k(x)|\geqslant\frac{1}{2n}\right]+mE\left[x;|f_k(x)-g(x)|\geqslant\frac{1}{2n}\right].$$

令$k\to\infty$，即得$mE\left[x;|f(x)-g(x)|\geqslant\frac{1}{n}\right]=0$. 但

$$E[x;f(x)\neq g(x)]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left[x;|f(x)-g(x)|\geqslant\frac{1}{n}\right],$$

故 $mE[x;f(x)\neq g(x)]=0$，即 $f(x)=g(x)$ a.e. 于 E.

习　题

1. 设 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$ 于 E，$g_n(x)\Rightarrow g(x)$ 于 E. 证明 $f_n(x)+g_n(x)\Rightarrow f(x)+g(x)$ 于 E.

2. 设 $|f_n(x)|\leqslant K$ a.e. 于 E，$n\geqslant 1$. 且 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$ 于 E. 证明 $|f(x)|\leqslant K$ a.e. 于 E.

3. 举例说明 $mE=+\infty$ 时，定理 1 不成立.

第五章　积分理论

现在我们已经可以着手建立我们所要的新的积分理论，即 Lebesgue 积分理论了．建立这种理论，有许多种不同的方法，最终都得到相似的结果．我们之所以采用下面将要采用的办法，是为了有利于和在数学分析中学过的 Riemann 积分相对照，同时也是考虑到这种方法能同样应用到更一般的抽象积分上去．

§1　非负函数的积分

我们分三段来讨论：

1° 设 E 是 R^n 中的一可测集，如果 E_1、E_2，$\cdots E_m$ 是 E 的互不相交的可测子集，$E=\bigcup\limits_{i=1}^{m}E_i$，则我们就说，$E_1,E_2,\cdots E_m$ 构成 E 的一个（可测）分划，或者说等式 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{m}E_i$ 表示 E 的一个分划．

设 D_1：$E=\bigcup\limits_{i=1}^{m_1}E_i^{(1)}$，$D_2$：$E=\bigcup\limits_{i=1}^{m_2}E_i^{(2)}$ 是 E 的两个分划，则

$$E=\bigcup_{i=1}^{m_1}\bigcup_{j=1}^{m_2}(E_i^{(1)}\cap E_j^{(2)}).$$

显然也是 E 的一个分划，我们称它是分划 D_1 和 D_2 的合并．

对于 E 的两个分划 D 和 D^*，如果 D^* 是 D 和 E 的另一分划的合并，则我们就说分划 D^* 比分划 D 更细密．

现在我们设 E 不仅是可测的，而且它的测度还是有限的，即 $mE<+\infty$．又设 $f(x)$ 是 E 上的非负有界函数，$0\leqslant f(x)\leqslant M<+\infty$．

对于E的分划$D:E=\bigcup_{i=1}^{m}E_i$，令

$$b_i=\inf_{x\in E_i}f(x),\quad B_i=\sup_{x\in E_i}f(x),\quad i=1,2,\cdots,m.$$

作和

$$s_D=\sum_{i=1}^{m}b_i mE_i,\qquad S_D=\sum_{i=1}^{m}B_i mE_i.$$

分别称之为$f(x)$关于分划D的**小和数**与**大和数**. 显然

$$0\leqslant s_D\leqslant S_D\leqslant MmE.$$

另外，如果我们作E上的简单函数

$$\overline{\psi}_D(x)=\sum_{i=1}^{m}B_i\varphi_{E_i}(x),$$

$$\underline{\psi}_D(x)=\sum_{i=1}^{m}b_i\varphi_{E_i}(x),$$

则在E上$\underline{\psi}_D(x)\leqslant f(x)\leqslant\overline{\psi}_D(x)$，所以

$$G(E;\underline{\psi}_D)\subset G(E;f)\subset G(E;\overline{\psi}_D).$$

而且

$$s_D=mG(E;\underline{\psi}_D),S_D=mG(E;\overline{\psi}_D).$$

引理1 如果E的分划D^*比D更细密，则

$$s_D\leqslant s_{D^*}\leqslant S_{D^*}\leqslant S_D.$$

证明 设$D=\bigcup_{i=1}^{m}E_i$，D^*是D和分划$D^{**}:E=\bigcup_{j=1}^{l}E_j^{**}$合并而来，即$D^*$是

$$E=\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{l}(E_i\cap E_j^{**})=\bigcup_{i,j=1}^{m,l}E_{ij},$$

此处E_{ij}表示$E_i\cap E_j^{**}$.

注意 $E_{ij}\subset E_i$，所以

$$b_i\triangleq\inf_{x\in E_i}f(x)\leqslant b_{ij}\triangleq\inf_{x\in E_{ij}}f(x)\leqslant B_{ij}\triangleq\sup_{x\in E_{ij}}f(x)\leqslant B_i\triangleq\sup_{x\in E_i}f(x),$$
$$(i=1,2,\cdots,m;\ i=1,2,\cdots,l).$$

于是

$$s_{D*}=\sum_{i,\ j=1}^{m,l}b_{ij}mE_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{l}b_{ij}mE_{ij}\right)$$
$$\geqslant\sum_{i=1}^{m}b_i\left(\sum_{j=1}^{l}mE_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{m}b_imE_i=s_D.$$
$$S_D{}^*=\sum_{i,\ j=1}^{m,l}B_{ij}mE_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{l}B_{ij}mE_{ij}\right)$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{m}B_i\left(\sum_{j=1}^{l}mE_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{m}B_imE_i=S_D.$$

而 $s_{D*}\leqslant S_{D*}$ 是已知的，所以

$$s_D\leqslant s_{D*}\leqslant S_{D*}\leqslant S_D.$$

推论 对于E的任意两个分划 D_1 和 D_2，都有

$$s_{D_1}\leqslant S_{D_2},\quad s_{D_2}\leqslant S_{D_1}.$$

证明 合并 D_1 和 D_2 成为一新的分划 D，则

$$s_{D_i}\leqslant s_D\leqslant S_D\leqslant S_{D_j},\quad i=1,2;j=1,2.$$

定义 1 对于测度有限的可测集E及E上的有界非负函数 $f(x)$，定义 $f(x)$在E上的**上积分**为

$$\overline{\int_E}f(x)dx=\inf_D\{S_D\}.$$

下积分为

$$\underline{\int_E}f(x)dx=\sup_D\{s_D\}.$$

此处 inf 和 sup 是就E的一切可能的分划取的.

由定义及前面的推论，即知

$$\underline{\int}_E f(x)dx \leqslant \overline{\int}_E f(x)dx.$$

又如果 $f(x)$ 在 E 上恒等于一常数 c，则 $\underline{\int}_E f(x)dx = \overline{\int}_E f(x)dx = cmE$.

定理 1 设 $mE < +\infty$，$f(x)$，$g(x)$ 都是 E 上的非负有界函数，则

(1) 当 $f(x) \leqslant g(x)$ $(x \in E)$ 时，

$$\underline{\int}_E f(x)dx \leqslant \underline{\int}_E g(x)dx, \quad \overline{\int}_E f(x)dx \leqslant \overline{\int}_E g(x)dx.$$

(2) 如果 E_1，E_2 都是 E 的可测子集，$E_1 \cap E_2 = \varnothing$，$E = E_1 \cup E_2$，则

$$\underline{\int}_E f(x)dx = \underline{\int}_{E_1} f(x)dx + \underline{\int}_{E_2} f(x)dx,$$

$$\overline{\int}_E f(x)dx = \overline{\int}_{E_1} f(x)dx + \overline{\int}_{E_2} f(x)dx.$$

(3) $$\underline{\int}_E [f(x)+g(x)]dx \geqslant \underline{\int}_E f(x)dx + \underline{\int}_E g(x)dx,$$

$$\overline{\int}_E [f(x)+g(x)]dx \leqslant \overline{\int}_E f(x)dx + \overline{\int}_E g(x)dx.$$

证明 (1) 是显然的. 现在证明(2). 对于 E_1 上的任一分划 D_1 和 E_2 上的任意分划 D_2，我们都可以把它们"拼接"成为 E 上的一个分划 D. 这时

$$\overline{\int}_E f(x)dx \leqslant S_D = S_{D_1} + S_{D_2}.$$

所以

$$\overline{\int}_E f(x)dx \leqslant \overline{\int}_{E_1} f(x)dx + \overline{\int}_{E_2} f(x)dx.$$

另一方面，对于 E 的任意分划

$$D^*: E=\bigcup_{i=1}^{m} E_i^*.$$

易见 $E_1^*\cap E_1, E_2^*\cap E_1, \cdots, E_m^*\cap E_1, E_1^*\cap E_2, E_2^*\cap E_2, \cdots, E_m^*\cap E_2$ 构成E上的一个比 D^*更细密的分划

$$D^{**}: E=\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i^*\cap E_1\right)\bigcup\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i^*\cap E_2\right).$$

注意 $E_1=\bigcup_{i=1}^{m}(E_i^*\cap E_1)$和 $E_2=\bigcup_{i=1}^{m}(E_i^*\cap E_2)$分别是 E_1 和 E_2 的分划，我们记之为 D_1^* 和 D_2^*，则由引理 1，

$$S_{D^*}\geqslant S_{D^{**}}=S_{D_1^*}+S_{D_2^*}\geqslant \overline{\int}_{E_1} f(x)dx+\overline{\int}_{E_2} f(x)dx,$$

因此又有

$$\overline{\int}_E f(x)dx\geqslant\overline{\int}_{E_1} f(x)dx+\overline{\int}_{E_2} f(x)dx.$$

于是

$$\overline{\int}_E f(x)dx=\overline{\int}_{E_1} f(x)dx+\overline{\int}_{E_2} f(x)dx.$$

关于下积分的等式的证明是类似的. 留作习题.

最后证明(3)，设 $\varepsilon>0$，由定义应有 E 的两个分划 D_1 和 D_2 使

$$S_{D_1}(f)<\overline{\int}_E f(x)dx+\frac{\varepsilon}{2},\quad S_{D_2}(g)<\overline{\int}_E g(x)dx+\frac{\varepsilon}{2}.$$

此处 $S_{D_1}(f)$，$S_{D_2}(g)$分别是 f 关于 D_1 和 g 关于 D_2 的大和数. 合并 D_1，D_2 而成 E 的一个更细密的分划 D，则当 $S_D(f+g)$是 $f(x)+g(x)$关于D的大和数时，

$$\overline{\int}_E[f(x)+g(x)]dx\leqslant S_D(f+g)\leqslant S_D(f)+S_D(g)$$

$$\leqslant S_{D_1}(f)+S_{D_2}(g).$$

$$<\overline{\int}_E f(x)dx+\overline{\int}_E g(x)dx+\varepsilon,$$

由于 $\varepsilon>0$ 任意，这说明

$$\overline{\int}_E[f(x)+g(x)]dx\leqslant\overline{\int}_E f(x)dx+\overline{\int}_E g(x)dx.$$

关于下积分的不等式可类似地证明.

定理 2 如果 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中测度有限的可测集，$f(x)$是 E 上的非负有界函数，则

$$\underline{\int}_E f(x)dx=\overline{\int}_E f(x)dx$$

的充要条件是 $f(x)$为 E 上的可测函数.

证明 充分性 设 $0\leqslant f(x)<M$ $(x\in E)$. 对任意 $\varepsilon>0$，取正整数 k 使$\frac{M}{k}<\frac{\varepsilon}{1+mE}$，由于 $f(x)$可测，所以若令

$$E_i=E\left[x;(i-1)\frac{M}{k}\leqslant f(x)<\frac{iM}{k}\right],i=1,2,\cdots,k.$$

则 $E=\bigcup_{i=1}^{k}E_i$ 是 E 的一个分划 D，显然

$$0\leqslant S_D-s_D=\sum_{i=1}^{k}(B_i-b_i)mE_i$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{k}\frac{M}{k}mE_i\leqslant\frac{M}{k}mE<\varepsilon.$$

因此

$$\overline{\int}_E f(x)dx-\underline{\int}_E f(x)dx<\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$ 任意，所以

$$\overline{\int}_E f(x)dx=\underline{\int}_E f(x)dx.$$

必要性　既然

$$\sup_D\left\{s_D\right\}=\underline{\int}_E f(x)dx=\overline{\int}_E f(x)dx=\inf_D\left\{S_D\right\},$$

对任意正整数 n，都应有 E 的分划 D'_n, D''_n，使

$$S_{D'_n}-s_{D''_n}<\frac{1}{n},$$

根据引理 1，我们对合并 D'_n, D''_n 而得的 D_n 也有

$$S_{D_n}-s_{D_n}<\frac{1}{n}.$$

由于必要时我们还可以合并 $D_1, \cdots, D_n$ 而作为新的 D_n，我们还可假定上述这一串分划是一个比一个更细密的. 设

$$D_n: E=\bigcup_{i=1}^{m_n}E_i^{(n)}, \quad n=1,2,3,\cdots$$

考虑与之相应的简单函数列

$$\underline{\psi}_n(x)=\sum_{i=1}^{m_n}b_i^{(n)}\varphi_{E_i^{(n)}}(x),$$

和

$$\overline{\psi}_n(x)=\sum_{i=1}^{m_n}B_i^{(n)}\varphi_{E_i^{(n)}}(x).$$

其中

$$b_i^{(n)}=\inf_{x\in E_i^{(n)}}f(x), \quad B_i^{(n)}=\sup_{x\in E_i^{(n)}}f(x), \quad i=1,2,\cdots,m_n; n=1,2,\cdots$$

它们都是 E 上的可测函数序列，并且在 E 上有

$$0\leqslant\underline{\psi}_1(x)\leqslant\underline{\psi}_2(x)\leqslant\cdots\leqslant\underline{\psi}_n(x)\leqslant\cdots\leqslant f(x)$$

$$\leqslant\cdots\leqslant\overline{\psi}_n(x)\leqslant\cdots\leqslant\overline{\psi}_2(x)\leqslant\overline{\psi}_1(x).$$

因而在 E 上 $\lim\limits_{n\to\infty}\underline{\psi}_n(x)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\overline{\psi}_n(x)$ 存在，令

$$\underline{f}(x)=\lim_{n\to\infty}\underline{\psi}_n(x),\bar{f}(x)=\lim_{n\to\infty}\bar{\psi}_n(x),$$

则 $\underline{f}(x),\bar{f}(x)$都是 E 上的非负可测函数，并且

$$\underline{f}(x)\leqslant f(x)\leqslant\bar{f}(x)\quad(x\in E).$$

我们说这里的$\underline{f}(x)$和 $\bar{f}(x)$其实是在 E 上几乎处处相等的. 因若不然，则有 $\varepsilon>0$, 使

$$mE(\varepsilon)=mE[x;\bar{f}(x)-\underline{f}(x)\geqslant\varepsilon]=\delta>0,$$

于是在 $E(\varepsilon)$上更应有 $\bar{\psi}_n(x)-\underline{\psi}_n(x)\geqslant\varepsilon$.

从而

$$\begin{aligned}S_{D_n}-s_{D_n}&=\sum_{i=1}^{m_n}(B_i^{(n)}-b_i^{(n)})mE_i^{(n)}\\&\geqslant\sum_{i=1}^{m_n}(B_i^{(n)}-b_i^{(n)})m(E(\varepsilon)\cap E_i^{(n)})\\&=\sum_{i=1}^{m_n}[\bar{\psi}_n(x)-\underline{\psi}_n(x)]m(E(\varepsilon)\cap E_i^{(n)})\\&\geqslant\varepsilon\sum_{i=1}^{m_n}m(E(\varepsilon)\cap E_i^{(n)})=\varepsilon\delta>0.\end{aligned}$$

与 $S_n-s_n<\frac{1}{n}\to0(n\to+\infty)$相冲突. 可见 $\bar{f}(x)$和 $\underline{f}(x)$在 E 上几乎处处相等，当然，$f(x)$也就和 $\bar{f}(x)$几乎处处相等，因而 $f(x)$在 E 上可测. 证完.

定理 2 告诉我们，当 $mE<+\infty$时，在 E 上的非负有界函数 $f(x)$在E上的上、下积分相等是和 $f(x)$在E上可测相等价的. 这时我们可把它的上、下积分的共同值称为 $f(x)$在E上的**积分**记为 $\int_E f(x)dx$.

从定理 1 立即可知，如果 $f(x)$，$g(x)$都是E上的非负有界可测函数，则

$$\int_E [f(x)+g(x)]dx=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx.$$

2° 以上我们考虑的是 $mE<+\infty$，$f(x)$ 在 E 上非负有界的情形．现在设 $f(x)$ 在 E 上只是非负．对每一正整数 m，令

$$\{f(x)\}_m=\min\{f(x),m\},$$

则 $\{f(x)\}_m$ 是 E 上的非负有界函数，如果这些 $\{f(x)\}_m$ 都在 E 上有积分，这等价于 $\{f(x)\}_m$ 在 E 上可测，令

$$I_m=\int_E \{f(x)\}_m dx,\quad m=1,2,3,\cdots$$

便得到一个单调上升的数列，因而 $\lim\limits_{m\to\infty} I_m$ 总是存在的，它可能是有限的也可能等于 $+\infty$．我们定义这个极限为 $f(x)$ 在 E 上的积分，即定义

$$\int_E f(x)dx=\lim_{m\to\infty}I_m=\lim_{m\to\infty}\int_E \{f(x)\}_m dx.$$

由于显然有

$$f(x)=\lim_{m\to\infty}\{f(x)\}_m.$$

我们立即可知要上述积分 $\int_E f(x)dx$ 存在必需且只需 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数．又如果 $f(x)$ 在 E 上实际上还是有界的，则当 m 充分大时，$\{f(x)\}_m=f(x)\ (x\in E)$，因此 I_m 便等于原先定义的 $f(x)$ 在 E 上的积分，可见用上述办法把积分定义推广到一般的非负函数上去的办法，和原有的定义是相容的．

如果 $f(x)$，$g(x)$ 都是 E 上的非负可测函数，E_1, E_2 是 E 的可测子集，$E=E_1\cup E_2$，$E_1\cap E_2=\varnothing$，则

(i) 当 $f(x)\leqslant g(x)\ (x\in E)$ 时，

$$\int_E f(x)dx\leqslant\int_E g(x)dx;$$

(ii) $\int_E f(x)dx=\int_{E_1} f(x)dx+\int_{E_2} f(x)dx;$

(iii) $\int_E[f(x)+g(x)]dx=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx.$

事实上,(i),(ii)从定理1的(i)(ii)直接推出. 至于(iii),因为对于任意m都有

$$\{f(x)+g(x)\}_m\leqslant\{f(x)\}_m+\{g(x)\}_m\leqslant\{f(x)+g(x)\}_{2m},$$

所以

$$\int_E\{f(x)+g(x)\}_m dx\leqslant\int_E\{f(x)\}_m dx+\int_E\{g(x)\}_m dx$$

$$\leqslant\int_E\{f(x)+g(x)\}_{2m}dx.$$

令$m\to+\infty$便得

$$\int_E[f(x)+g(x)]dx\leqslant\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx\leqslant\int_E[f(x)+g(x)]dx.$$

这说明(iii)是成立的.

3° 最后我们来考虑$mE=+\infty$的情形,对任何正整数m,令

$$E_m=E[x;\|x\|\leqslant m]=\{x;x\in E,\|x\|\leqslant m\},$$

则$mE_m<+\infty$. 如果$f(x)$是E上的非负函数,它在每一E_m上都有积分(这相当于说$f(x)$在每一E_m上都非负可测),则它在E_m上的积分

$$J_m=\int_{E_m}f(x)dx$$

构成一递增的**广义数列**. 现在定义$f(x)$在E上的积分为

$$\int_E f(x)dx=\lim_{m\to\infty}J_m=\lim_{m\to\infty}\int_{E_m}f(x)dx.$$

显然,上述积分存在的充要条件仍为$f(x)$在E上非负可测,因此以下直到本节末我们总假定E是一般可测集(不必具有限测度)而$f(x)$在E上非负可测.

定理3 $\mathbf{R}^n$中的可测集E上的非负可测函数$f(x)$的积分

$$\int_E f(x)dx = mG(E;f).$$

证明 如果 $mE<+\infty$, $f(x)$ 有界，$\{\underline{\psi}_n(x)\}$ 是定理 2 中证明必要性时所构造的非负简单函数列，则

1° $f(x)=\lim_{m\to\infty} \underline{\psi}_m(x)$ a.e. 于 E;

2° $\underline{\psi}_m(x)\leqslant \underline{\psi}_{m+1}(x)$, $m=1,2,3,\cdots$;

3° $mG(E;\underline{\psi}_m)=s_{D_n}\to\underline{\int}_E f(x)dx=\int_E f(x)dx.$

设 E 中使 1°不成立的点构成的零测度子集为 E_0，则

$$G(E-E_0;\underline{\psi}_m)\subset G(E-E_0;\underline{\psi}_{m+1})\quad m\geqslant 1,$$

$$G(E-E_0;f)=\bigcup_{m=1}^{\infty}G(E-E_0;\underline{\psi}_m).$$

于是只要注意到 $mG(E_0;f)=mG(E_0;\underline{\psi}_m)=0$，即得

$$\begin{aligned} mG(E;f) &= mG(E-E_0;f) \\ &= \lim_{m\to\infty} mG(E-E_0;\underline{\psi}_m) \\ &= \lim_{m\to\infty} mG(E;\underline{\psi}_m) = \lim_{m\to\infty} s_{D_m} \\ &= \int_E f(x)dx. \end{aligned}$$

当 $mE<+\infty$, $f(x)$ 在 E 上为一般的非负可测函数时，因为

$$G(E;\{f\}_m)\subset G(E;\{f\}_{m+1}),\ m=1,2,\cdots$$
$$G(E;f)=\lim_{n\to\infty}G(E;\{f\}_m),$$

所以

$$\begin{aligned} mG(E;f) &= \lim_{m\to\infty} mG(E;\{f\}_m) \\ &= \lim_{m\to\infty}\int_E\{f(x)\}_m dx=\int_E f(x)dx. \end{aligned}$$

最后，如果 $mE=+\infty$，则从已证明的结果和 $G(E;f)=\lim_{m\to\infty}G(E_m;$

f)同样可得到所要的结论，证完.

定理 4 如果 $f(x)$，$g(x)$ 都是可测集合 E 上的非负可测函数，则

(1) 当 $f(x)\leqslant g(x)$ $(x\in E)$时，

$$\int_E f(x)dx\leqslant\int_E g(x)dx,$$

(2) 当 E_1, E_2 是 E 的互不相交的可测子集，$E=E_1\cup E_2$ 时，

$$\int_E f(x)dx=\int_{E_1} f(x)dx+\int_{E_2} f(x)dx.$$

特别是 $\int_E f(x)dx\geqslant\int_{E_i} f(x)dx, i=1,2.$

(3) $\int_E[f(x)+g(x)]dx=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx.$

(4) 如果 $f(x)=g(x)$ a. e. 于 E，则

$$\int_E f(x)dx=\int_E g(x)dx.$$

证明 当 $mE<+\infty$ 时，(1)、(2)和(3)都是已知的，至于(4)，只要注意到当 $mE_1=0$ 时，

$$\int_{E_1} f(x)dx=\int_{E_1} g(x)dx=0,$$

即可从 (2) 推出. 通过一次简单的取极限的手续，即知上述各结论在 $mE=+\infty$时仍成立.

定理 5 (Levi 定理) 设

(1) $f_m(x)$，$m=1,2,3,\cdots$，都是 E 上的非负可测函数，

(2) $f_m(x)\leqslant f_{m+1}(x)$ $(x\in E)$，$m=1,2,3,\cdots$

(3) $f(x)=\lim\limits_{m\to\infty}f_m(x)$ a. e. 于 E，

则

$$\int_E f(x)dx=\lim_{m\to\infty}\int_E f_m(x)dx.$$

证明 由定理 4 的(iv)，可设在E上处处有$f(x)=\lim\limits_{m\to\infty}f_m(x)$。于是

$$G(E;f)=\lim_{m\to\infty}G(E;f_m)$$

由定理 3 即知本定理成立。

上面的证明很自然、直观。但要用到下方图形的可测性定理(第四章§ 1 定理 1)而这定理的证明与 $\mathbf{R}^n$ 中乘积测度理论有关。这种空间的限制将影响理论的推广与应用。为此我们现在再给出一个远为麻烦的证明。

先看$\int_E f(x)dx<+\infty$的情形。对$\varepsilon>0$，选正整数 m 和 k 使

$$\int_{E_m}\{f(x)\}_k dx>\int_E f(x)dx-\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

此处 $E_m=E[x;\|x\|\leqslant m]$。注意 $mE_m<+\infty$ 且在 E_m 上$\{f(x)\}_k=\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\}_k$，由 Egoroff 定理，有 $e\subset E_m$ 使 $me<\frac{\varepsilon}{4k}$且在 E_m-e 上$\{f_n(x)\}_k$ 一致收敛于$\{f(x)\}_k$。设正整数 n_0 使 $n\geqslant n_0$时，对一切$x\in E_m-e$ 都有

$$0\leqslant\{f(x)\}_k-\{f_n(x)\}_k<\frac{1}{4(1+mE_m)}, \tag{2}$$

则当 $n\geqslant n_0$ 时，

$$\int_E f_n(x)dx\geqslant\int_{E_m-e}\{f_n(x)\}_k dx\geqslant\int_{E_m-e}\{f(x)\}_k dx-\frac{\varepsilon}{4}. \tag{3}$$

另一方面

$$\int_{E_m}\{f(x)\}_k dx=\int_{E_m-e}\{f(x)\}_k dx+\int_e\{f(x)\}_k dx$$

$$<\int_{E_m-e}\{f(x)\}_k dx+\frac{\varepsilon}{4}. \tag{4}$$

因此当 $n\geqslant n_0$ 时，依次由(3)，(4)，(1)式得

$$\int_E f_n(x)dx > \int_{E_m - e}\{f(x)\}_k dx - \frac{\varepsilon}{4}$$

$$> \int_{E_m}\{f(x)\}_k - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4}$$

$$> \int_E f(x)dx - \varepsilon.$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx \geqslant \int_E f(x)dx - \varepsilon$. 注意 $\varepsilon>0$ 任意便知

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx \geqslant \int_E f(x)dx. \tag{5}$$

另一方面，对任意 n 都有 $f_n(x)\leqslant f(x)$ $(x\in E)$. 所以

$$\int_E f_n(x)dx \leqslant \int_E f(x)dx.$$

于是
$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx \leqslant \int_E f(x)dx.$$

结合(5)便得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

至于$\int_E f(x)dx = +\infty$的情形. 证明是类似的. 我们留给大家作为练习.

定理 6 (Lebesgue 基本定理) 如果 $f_n(x)$, $n=1,2,3,\cdots$, 都是 E 上的非负可测函数, $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$, 则

$$\int_E f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

证明 令

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x),$$

则 $S_n(x)$是 E 上的非负可测函数, $S_n(x)\leqslant S_{n+1}(x)$, $x\in E$, $n=1,2,$

3，…，并且 $f(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)$. 所以由 Levi 定理知

$$\int_E f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_E S_n(x)dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_E f_k(x)dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

证完.

定理 7(Fatou 引理)　若 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ 是 E 上的一串非负可测函数，则

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

证明. 令

$$g_n(x)=\inf_{k\geqslant 0}\{f_{n+k}(x)\}\quad (x\in E),$$

则 $g_n(x)$ 是 E 上的非负可测函数，

$$g_1(x)\leqslant g_2(x)\leqslant\cdots\leqslant g_n(x)\leqslant\cdots,$$

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}g_n(x),$$

$$g_n(x)\leqslant f_n(x),\ n=1,2,3,\cdots,$$

于是从 Levi 定理得

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)dx=\int_E \lim_{n\to\infty}g_n(x)dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)dx\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

证完.

对定理 7 中的函数列 $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ 没有假定有递增性，定理结论中的不等号确实是可以成立的，在下节中我们将给出具体的例子.

习　题

1. 试就[0, 1]上的 Dirichlet 函数 $D(x)$和 Riemann 函数 $R(x)$ 计算 $\int_{[0,1]} D(x)dx$和$\int_{[0,1]} R(x)dx$.

2. 证明定理1 (iii)中的第一式.

3. 补作定理5中$\int_E f(x)dx=+\infty$的情形的详细证明.

4. 证明：如果$f(x)$是E上的非负函数，$\int_E f(x)dx=0$，则$f(x)=0$ a.e.于E.

5. 证明：当$mE<+\infty$时，E上的非负可测函数$f(x)$的积分$\int_E f(x)dx$ $<+\infty$的充要条件是$\sum_{k=0}^{\infty}2^k mE[x;f(x)\geqslant 2^k]<+\infty$.

6. 如果$f(x)$，$g(x)$都是E上的非负可测函数，并且对于任意常数a都有

$$mE[x;f(x)\geqslant a]=mE[x;g(x)\geqslant a],$$

则

$$\int_E f(x)dx=\int_E g(x)dx.$$

7. 设$mE<+\infty$，$f(x)$是E上的有界非负可测函数，$0\leqslant f(x)<M$,

$$0=y_0^{(n)}<y_1^{(n)}<\cdots<y_{k_n}^{(n)}=M, n=1,2,\cdots$$

使

$$\max\{y_i^{(n)}-y_{i-1}^{(n)}; i=1,2,\cdots,k_n\}=l_n\to 0\ \ (n\to+\infty),$$

$$E_i^{(n)}=E[x;y_{i-1}^{(n)}\leqslant f(x)<y_i^{(n)}], \xi_i^{(n)}\in E_i^{(n)}, i=1,2,\cdots,k_n; n=1,2,3,\cdots.$$

证明：

$$\int_E f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n}f(\xi_i^{(n)})mE_i^{(n)}.$$

8. 设$mE<+\infty$. $f(x)$是E上的非负可测函数，$\int_E f(x)dx<+\infty$，$e_n=E[x;f(x)\geqslant n]$，证明$\lim_{n\to\infty}n\cdot me_n=0$.

9. 设$f(x)$是E上的非负可测函数，$\int_E f(x)dx<+\infty$，对任意$r>0$，令

$$F(r)=\int_{E[x;\|x\|<r]} f(x)dx,$$

证明 $F(r)$ 是 $(0,\infty)$ 上的连续函数.

10. 证明：如果非负可测函数 $f(x)$ 在 E 上的积分 $\int_E f(x)dx<+\infty$，则对于任意 c，$0\leqslant c\leqslant\int_E f(x)dx$ 都有 E 的可测子集 E_1，使 $\int_{E_1} f(x)dx=c$.

11. 设 $mE<+\infty$，$E_1,E_2,\cdots,E_m$ 是 E 的 m 个可测子集，正整数 $k\leqslant m$. 证明：如果 E 中每一个点至少属于 k 个 E_i，则有 i 使 $mE_i\geqslant\frac{k}{m}mE$.

12. 设 $mE<+\infty$，$f(x)>0$ 且在 E 上可测. 证明对任意 $\delta>0$，都有 $d>0$，使只要 $E_1\subset E$，$mE_1\geqslant\delta$ 便有 $\int_{E_1} f(x)dx\geqslant d$.

13. 设 $mE<+\infty$，$f(x)$ 是 E 上的有界非负可测函数，证明有 $[0,mE]$ 上的非负单调不增函数 $g(y)$，使对任意常数 a 都有

$$mE[x;f(x)\geqslant a]=m\{y;0\leqslant y\leqslant mE,g(y)\geqslant a\},$$

进而证明

$$\int_E f(x)dx=\int_{[0,mE]} g(y)dy.$$

14. 设 $f_n(x)$，$n=1,2,3,\cdots$ 都是 E 上的非负可测函数，$f_n(x)\geqslant f_{n+1}(x)$ $(x\in E,n=1,2,3,\cdots)$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 并且有 n_0 使 $\int_E f_{n_0}(x)dx<+\infty$. 证明

$$\int_E f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

举例说明当 $\int_E f_n(x)dx$ 恒为 $+\infty$ 时，上述结论不成立.

15. 设 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数，如果对任意 m，都有

$$\int_E [f(x)]^m dx=\int_E f(x)dx<+\infty,$$

则 $f(x)$ 几乎处处等于一可测集合的示性函数.

16. 证明：如果 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，则对于任意常数 $a>0$ 都有

$$mE[x;|f(x)|\geqslant a]\leqslant\frac{1}{a}\int_E |f(x)|dx,$$

$$mE[x;f(x)\geqslant a]\leqslant e^{-a}\int_E \exp f(x)dx.$$

17. 证明：如果 $f(x)$ 是 R^1 上的非负可测函数，则对任意实数 a,b,c,t，

$a<b, c>0$ 都有

$$\int_{[a,b]} f(cx+t)dx=\frac{1}{c}\int_{[ca+t,cb+t]} f(x)dx.$$

§2 可积函数

上一节我们考虑的是非负函数的积分．现在我们来讨论一般的函数的积分．E 仍为$\mathbf{R}^n$中的可测集合，$f^+(x), f^-(x)$分别代表函数 $f(x)$的正部和负部，即

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\},$$
$$f^-(x)=\max\{-f(x),0\}.$$

这都是非负的函数，并且

$$f(x)=f^+(x)-f^-(x),$$
$$|f(x)|=f^+(x)+f^-(x).$$

由于从§1 的讨论，已知要非负函数在一可测集合 E 上有积分必须且只需它在 E 上可测，以下我们总假定所考虑的函数 $f(x)$ 在 E 上是可测的，于是 $f^+(x), f^-(x), |f(x)|$全都是 E 上的非负可测函数．所以

$$\int_E f^+(x)dx,\ \int_E f^-(x)dx,\ \int_E |f(x)|dx$$

都是有意义的，并且

$$\int_E |f(x)|dx=\int_E f^+(x)dx+\int_E f^-(x)dx. \tag{1}$$

定义1 如果E上的可测函数 $f(x)$ 的正部和负部的积分 $\int_E f^+(x)\,dx$ 和 $\int_E f^-(x)dx$ 中至少有一个是有限的，则我们就说 $f(x)$在E上是**有积分的**，其积分定义为

$$\int_E f(x)dx=\int_E f^+(x)dx-\int_E f^-(x)dx.$$

而如果$\int_E f^+(x)\,dx$和$\int_E f^-(x)dx$都有限，则$\int_E f(x)\,dx$就是有限的，这时我们便说$f(x)$是在E上(Lebesgue)可积的.

从定义立即可知，只要$f(x)$在E上有积分便有

$$\int_E -f(x)dx=-\int_E f(x)dx.$$

$$\left|\int_E f(x)dx\right|\leqslant\int_E |f(x)|\,dx. \tag{2}$$

从而可得下述定理 1.

定理 1 如果$f(x)$在E上可测，则

(1) $f(x)$在E上可积的充要条件是$|f(x)|$在E上可积.

(2) 如果$mE<+\infty$，$f(x)$在E上有界，则$f(x)$在E上可积.

定理 2 如果有界函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上是 Riemann 可积的，则$f(x)$在$[a,b]$上也是(Lebesgue)可积的，并且

$$\int_{[a,b]} f(x)dx=(R)\int_a^b f(x)dx.$$

此处$(R)\int_a^b f(x)dx$表示$f(x)$在$[a,b]$上的Riemann 积分.

证明 当$f(x)$在$[a,b]$上 Riemann 可积时，$f^+(x)$，$f^-(x)$也在$[a,b]$上 Riemann 可积且

$$(R)\int_a^b f(x)dx=(R)\int_a^b f^+(x)dx-(R)\int_a^b f^-(x)dx.$$

所以不妨假设$f(x)$是非负的. 由于$f(x)$还是有界的，所以我们要证明的就是

$$\underline{\int}_{[a,b]} f(x)dx=\overline{\int}_{[a,\ b]} f(x)dx=(R)\int_a^b f(x)dx. \tag{3}$$

由有界函数 Riemann 可积的条件，对于任意$\varepsilon>0$，都有$[a,b]$的一个分划Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 使$f(x)$的关于Δ的Riemann大小和$\bar{S}_\Delta$，$\bar{s}_\Delta$满足条件

$$0\leqslant\bar{S}_{\Delta}-\bar{s}_{\Delta}<\varepsilon, \tag{4}$$

$$\bar{S}_{\Delta}=\sum_{i=1}^{n}\bar{B}_{i}\Delta x_{i},\quad \bar{s}_{\Delta}=\sum_{i=1}^{n}\bar{b}_{i}\Delta x_{i},$$

$$\bar{B}_{i}=\sup_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_{i}}f(x),\ \bar{b}_{i}=\inf_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_{i}}f(x),\ \Delta x_{i}=x_{i}-x_{i-1}.$$

由于 $\bar{s}_{\Delta}\leqslant(R)\int_{a}^{b}f(x)dx\leqslant\bar{S}_{\Delta}$. 所以

$$(R)\int_{a}^{b}f(x)dx-\varepsilon<\bar{s}_{\Delta}\leqslant\bar{S}_{\Delta}<(R)\int_{a}^{b}f(x)dx+\varepsilon. \tag{5}$$

现令 $E_{1}=[x_{0},x_{1}]$, $E_{i}=(x_{i-1}, x_{i}]$, $i=2, \cdots, n$, 则 $[a, b]=\bigcup_{i=1}^{n}E_{i}$ 便是 $[a,b]$ 的一个可测分划 D. 因为 $mE_{i}=\Delta x_{i}$,

$$B_{i}=\sup_{x\in E_{i}}f(x)\leqslant\bar{B}_{i},\ b_{i}=\inf_{x\in E_{i}}f(x)\geqslant\bar{b}_{i}.$$

$f(x)$ 关于 D 的大、小和数 S_{D}, s_{D} 满足

$$\bar{s}_{\Delta}\leqslant s_{D}\leqslant S_{D}\leqslant\bar{S}_{\Delta}.$$

从而由(5)式得

$$(R)\int_{a}^{b}f(x)dx-\varepsilon<s_{D}\leqslant S_{D}<(R)\int_{a}^{b}f(x)dx+\varepsilon.$$

进而

$$(R)\int_{a}^{b}f(x)dx-\varepsilon<\underline{\int}_{[a,b]}f(x)dx\leqslant\overline{\int}_{[a,b]}f(x)dx$$

$$<(R)\int_{a}^{b}f(x)\ dx+\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的,所以(3)式成立. 证完.

以后为书写简便计, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分将记为 $\int_{a}^{b}f(x)dx$.

上面的定理谈的是一维空间的情形. 对于高维空间, 类似的定理也是成立的. 不过在定义 Riemann 积分的重积分时, 要把区域分成"有面积"的小块;而"有面积"一辞的精确定义,在数学分

析中一般都不进行认真的讨论，所以我们现在也不去讨论这种一般的情况.

例 1 设 $E=[0,1]$，$f_n(x)=nx^{n-1}$ 自然是 E 上的非负可测函数，由于

$$(R)\int_0^1 f_n(x)dx=(R)\int_0^1 nx^{n-1}dx$$

$$=x^n\Big|_0^1=1.$$

所以

$$\int_E f_n(x)dx=\int_a^b f_n(x)dx=1,\ n\geq 1.$$

从而

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_E f_n(x)dx=1.$$

但是显然有 $\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)=0$, $x\in E$. 所以

$$\int_E \underline{\lim_{n\to\infty}}\ f_n(x)dx=0.$$

可见 Fatou 引理(§1 定理 7)中的不等号确实可以成立.

例 2 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$$

在$[0,1]$上是可积的，但不是 Riemann 可积的.

定理 3 若 $f(x)$在 E 上可积，则 $mE[x;f(x)=+\infty]=mE[x;f(x)=-\infty]=0$.

证明 设不然，比如说 $mE[x;f(x)=+\infty]=\delta>0$，则必有 m 使

$$mE[x;\|x\|\leqslant m, f(x)=+\infty]\geqslant\frac{\delta}{2}>0.$$

令 $E_m^+=E[x;\|x\|\leqslant m,f(x)=+\infty]$，则对任意正整数 k 都有

$$\int_E f^+(x)dx\geqslant\int_{E_m^+}f^+(x)dx\geqslant\int_{E_m^+}\{f^+(x)\}_k dx$$

$$\geqslant kmE_m^+\geqslant\frac{k\delta}{2},$$

这说明 $\int_E f^+(x)dx=+\infty$. 与 $f(x)$ 在 E 上可积矛盾. 同法可证

$$mE[x;f(x)=-\infty]=0.$$

定理 4 如果 E 是可测集，则

(1) 当 $f(x)$ 在 E 上可测，$g(x)$ 在 E 上可积，$|f(x)|\leqslant g(x)$ 时，$f(x)$ 也在 E 上可积.

(2) 当 $f(x)$ 在 E 上有积分时，对于任意常数 c，$cf(x)$ 也在 E 上有积分，并且

$$\int_E cf(x)dx=c\int_E f(x)dx.$$

(3) 当 $f(x)$，$g(x)$ 都在 E 上可积时，$f(x)+g(x)$ 也在 E 上可积且

$$\int_E[f(x)+g(x)]dx=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx.$$

(4) 当 E_n，$n=1, 2, 3, \cdots$，都是 E 的可测子集，互不相交，$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，$f(x)$ 在 E 上有积分时，$f(x)$ 在每一 E_n 上都有积分且

$$\int_E f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f(x)dx.$$

特别当 $f(x)$ 在 E 上可积时，$f(x)$ 在 E 的任意可测子集上仍可积.

(5) 当 $f(x)$，$g(x)$ 都在 E 上有积分且 $f(x)\leqslant g(x)$ $(x\in E)$ 时，$\int_E f(x)dx\leqslant\int_E g(x)dx$.

(6) 当 $f(x)$ 在 E 上有积分且 $f(x)=g(x)$ a.e. 于 E 时，$g(x)$ 在 E 上也有积分且

$$\int_E g(x)dx=\int_E f(x)dx.$$

证明 (6) 的证明 注意此时

$$f^+(x)=g^+(x) \text{ a.e. 于 } E.$$
$$f^-(x)=g^-(x) \text{ a.e. 于 } E,$$

所以从§1定理4的(4)即得.

(5) 的证明 因为这时

$$f^+(x)\leqslant g^+(x),\ f^-(x)\geqslant g^-(x),$$

所以从§1定理4的(1)即知(5)成立.

(4) 的证明 用 $\varphi_{E_n}(x)$ 表 E_n 的示性函数，则由§1定理4 (2) 知 $\int_{E_n} f^+(x)dx=\int_E f^+(x)\varphi_{E_n}(x)dx$，又显然有

$$f^+(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f^+(x)\varphi_{E_n}(x)\ (x\in E).$$

所以由 Lebesgue 基本定理(§1定理6)，

$$\int_E f^+(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f^+(x)\varphi_{E_n}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f^+(x)dx.$$

同理，

$$\int_E f^-(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f^-(x)dx.$$

既然 $f(x)$ 在 E 上有积分，$\int_E f^+(x)dx$ 和 $\int_E f^-(x)dx$ 至少有一个有限，比如说 $\int_E f^+(x)dx$ 是有限的，于是每个 $\int_{E_n} f^+(x)dx$ 都有限，所以 $f(x)$ 在每个 E_n 上都有积分.

$$\int_E f(x)dx=\int_E f^+(x)dx-\int_E f^-(x)dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f^+(x)dx-\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f^-(x)dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{E_n}f^+(x)dx-\int_{E_n}f^-(x)dx\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f(x)dx \ .$$

(3) 的证明　从定理 2 知我们不妨设 $f(x)$, $g(x)$在E上都是只取有限值的，令

$$E_1=E[x;f(x)\geqslant 0,g(x)\geqslant 0],$$
$$E_2=E[x;f(x)<0,g(x)<0],$$
$$E_3=E[x;f(x)\geqslant 0,g(x)<0,f(x)+g(x)\geqslant 0],$$
$$E_4=E[x;f(x)\geqslant 0,g(x)<0,f(x)+g(x)<0],$$
$$E_5=E[x;f(x)<0,g(x)\geqslant 0,f(x)+g(x)\geqslant 0],$$
$$E_6=E[x;f(x)<0,g(x)\geqslant 0,f(x)+g(x)<0].$$

在 E_1 上 $f(x)$, $g(x)$都非负可测，所以由§ 1 定理 4

$$\int_{E_1}[f(x)+g(x)]dx=\int_{E_1}f(x)dx+\int_{E_1}g(x)dx.$$

在 E_2 上$-f(x)$, $-g(x)$都非负可测，所以

$$\int_{E_2}-[f(x)+g(x)]dx=\int_{E_2}[-f(x)]dx+\int_{E_2}[-g(x)]dx$$
$$=-\int_{E_2}f(x)dx-\int_{E_2}g(x)dx,$$

亦即

$$\int_{E_2}[f(x)+g(x)]dx=\int_{E_2}f(x)dx+\int_{E_2}g(x)dx.$$

在 E_3 上，$f(x)$, $-g(x)$, $f(x)+g(x)$非负，并且

$$f(x)=[f(x)+g(x)]+[-g(x)].$$

所以

$$\int_{E_3} f(x)dx = \int_{E_3} [f(x)+g(x)]dx - \int_{E_3} g(x)dx.$$

移项后得

$$\int_{E_3} f(x)dx + \int_{E_3} g(x)dx = \int_{E_3} [f(x)+g(x)]dx.$$

用类似的办法，同样可证

$$\int_{E_i} f(x)dx + \int_{E_i} g(x)dx = \int_{E_i} [f(x)+g(x)]dx,$$

对 $i=4,5,6$ 也是成立的.

由于

$$\int_E [f(x)+g(x)]^+ dx = \int_{E_1} [f(x)+g(x)]dx + \int_{E_3} [f(x)+g(x)]dx + \int_{E_5} [f(x)+g(x)]dx$$

$$= \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_1} g(x)dx + \int_{E_3} f(x)dx + \int_{E_3} g(x)dx + \int_{E_5} f(x)dx + \int_{E_5} g(x)dx$$

$$= \int_{E_1 \cup E_3 \cup E_5} f(x)dx + \int_{E_1 \cup E_3 \cup E_5} g(x)dx$$

$$\int_E [f(x)+g(x)]^- dx = -\int_{E_2} [f(x)+g(x)]dx - \int_{E_4} [f(x)+g(x)]dx - \int_{E_6} [f(x)+g(x)]dx$$

$$= -\int_{E_2 \cup E_4 \cup E_6} f(x)dx - \int_{E_2 \cup E_4 \cup E_6} g(x)dx,$$

所以 $\int_E [f(x)+g(x)]^+ dx$, $\int_E [f(x)+g(x)]^- dx$ 都是有限的，即 $f(x)+g(x)$ 在 E 上可积，而且

$$\int_E [f(x)+g(x)]dx$$

$$=\int_E [f(x)+g(x)]^+dx-\int_E [f(x)+g(x)]^-dx$$

$$=\int_{E_1\cup E_3\cup E_5} f(x)dx+\int_{E_2\cup E_4\cup E_6} f(x)dx$$

$$+\int_{E_1\cup E_3\cup E_5} g(x)dx+\int_{E_2\cup E_4\cup E_6} g(x)dx$$

$$=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx.$$

(2) 的证明 显然不妨设 $c>0$ 和 $f(x)$ 非负. 若 c 为有理数，则由(3)知结论成立. 若 c 为无理数，则可取正有理数序列 $\{r_n\}$ 和 $\{R_n\}$，使 $r_n\uparrow c, R_n\downarrow c$，于是

$$r_n\int_E f(x)dx=\int_E r_nf(x)dx\leqslant\int_E cf(x)dx$$

$$\leqslant\int_E R_nf(x)\,dx=R_n\int_E f(x)dx.$$

如果 $\int_E f(x)dx=+\infty$，则上式说明

$$\int_E cf(x)dx=+\infty=c\int_E f(x)dx.$$

如果 $\int_E f(x)dx<+\infty$，则只要在上式中令 $n\to\infty$，便得

$$\int_E cf(x)dx=c\int_E f(x)dx.$$

(1) 的证明 因为

$$\int_E |f(x)|dx\leqslant\int_E g(x)dx<+\infty$$

所以 $|f(x)|$ 在 E 上可积. 从而 $f(x)$ 在 E 上可积.

定理 5（积分的绝对连续性） 若 $f(x)$ 在 E 上可积，则于任意 $\varepsilon>0$，恒有 $\delta>0$，使 $A\subset E$, $mA<\delta$ 时，$\left|\int_A f(x)dx\right|<\varepsilon$.

证明 令 $g(x)=|f(x)|$，则 $g(x)$ 在 E 上可积. 对于给定的

$\varepsilon>0$. 取 m 充分大，使

$$0\leqslant\int_E g(x)dx-\int_{E_m}g(x)dx=\int_{E-E_m}g(x)dx<\frac{\varepsilon}{2},$$

此处 $E_m=E[x;\|x\|\leqslant m]$. 其次取 N 充分大，使

$$0\leqslant\int_{E_m}g(x)dx-\int_{E_m}\{g(x)\}_N dx=\int_{E_m}(g(x)-\{g(x)\}_N)dx$$
$$<\frac{\varepsilon}{4}.$$

令 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4N}$，则当 $A\subset E, mA<\delta$ 时，

$$\int_{A\cap E_m}\{g(x)\}_N dx\leqslant N\cdot mA<N\cdot\delta=\frac{\varepsilon}{4}.$$

于是

$$\left|\int_A f(x)dx\right|\leqslant\int_A g(x)dx=\int_{A\cap E_m}g(x)dx+\int_{A\cap(E-E_m)}g(x)dx$$
$$<\int_{A\cap E_m}(g(x)-\{g(x)\}_N)dx+\int_{A\cap E_m}\{g(x)\}_N dx+\int_{E-E_m}g(x)dx$$
$$<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

证完.

定义 2 设 E 是一可测集，$\mathscr{F}$ 是一族在 E 上可积的函数. 如果对于任意 $\varepsilon>0$，都有仅与 ε 有关的 $\delta>0$，使当 $A\subset E, mA<\delta$ 时，对一切 $f\in\mathscr{F}$ 都有

$$\left|\int_A f(x)dx\right|<\varepsilon, \tag{6}$$

则我们就说 $\mathscr{F}$ 是在 E 上**积分等度绝对连续**的函数族.

注意如果 $\mathscr{F}$ 是在 E 上积分等度绝对连续的函数族，$\delta>0$ 是使 (6) 式对 $\dfrac{\varepsilon}{2}$ 成立的常数，则对 $A\subset E$，$mA<\delta$，$f\in\mathscr{F}$，若令 $A^+=A\cap E[x;f(x)\geqslant 0]$，$A^-=A\cap E[x;f(x)<0]$，便有 $mA^+<\delta, mA^-$

$<\delta$，所以

$$\int_A |f(x)|dx = \int_{A^+} |f(x)|dx + \int_{A^-} |f(x)|dx$$

$$= \left|\int_{A^+} f(x)dx\right| + \left|\int_{A^-} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

可见定义 2 中的(6)式还可加强成

$$\int_A |f(x)|dx < \varepsilon \qquad (f\in\mathscr{F}, mA<\delta). \tag{6'}$$

定理 6(Vitali 定理) 设

(1) $mE<+\infty$,

(2) $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是在 E 上积分等度绝对连续的函数序列,

(3) 在 E 上 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$,

则 $f(x)$ 在 E 上可积且

$$\int_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

证明 由条件(2)，对每一正整数 i，都可选取 δ_i，$0<\delta_i\leqslant\frac{1}{2^i}$ 使 $A\subset E$，$mA<\delta_i$ 时，

$$\int_A |f_n(x)|dx < \frac{1}{2^{i+2}}, \quad n\geqslant 1. \tag{7}$$

令 $$E_n(i) = E\left[x; |f_n(x)-f(x)|\geqslant\frac{1}{2^i(mE+1)}\right],$$

$$E_{m,n}(i) = E\left[x; |f_m(x)-f_n(x)|\geqslant\frac{1}{2^{i+1}(mE+1)}\right].$$

利用条件(3)选取正整数 N_i 使 $n\geqslant N_i$ 时，$mE_n(i)<\frac{\delta_i}{2}$，由于 $E_{m,n}(i)\subset E_m(i)\cup E_n(i)$，所以 $m>n\geqslant N_i$ 时，$mE_{m,n}(i)<\delta_i$，从而

$$\int_E |f_m(x)-f_n(x)|dx \leqslant \int_{E-E_{m,n}(i)} |f_m(x)-f_n(x)|dx$$

$$+\int_{E_{m,n}(i)} |f_m(x)|dx + \int_{E_{m,n}(i)} |f_n(x)|dx$$

$$<\frac{1}{2^{i+1}(mE+1)}m(E-E_{m,n}(i))+\frac{1}{2^{i+2}}+\frac{1}{2^{i+2}}$$

$$\leqslant\frac{1}{2^{i+1}}+\frac{1}{2^{i+1}}=\frac{1}{2^{i}}. \tag{8}$$

由 Riesz 定理，有$\{f_n(x)\}$的子序列$\{f_{n_i}(x)\}$ 使 $f(x)=\lim\limits_{i\to\infty}f_{n_i}(x)$, a.e. 于 E. 显然不妨设 $n_i\geqslant N_i$ 于是

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}(f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x))+f_{n_1}(x).$$

令

$$F(x)=\sum_{i=1}^{\infty}|f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)|+|f_{n_1}(x)|,$$

则 $F(x)$是E上的非负可测函数，

$$|f(x)|\leqslant F(x) \quad \text{a.e.于 } E$$

由 Lebesgue 基本定理及(8)式，

$$\int_E F(x)dx=\sum_{i=1}^{\infty}\int_E|f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)|dx+\int_E|f_{n_1}(x)|dx$$

$$<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}+\int_E|f_{n_1}(x)|dx<+\infty.$$

可见 $F(x)$在E上可积，从而 $f(x)$也在E上可积.

设 $\varepsilon>0$ 是任意给定的常数，由定理 5，有 $\delta>0$，使 $A\subset E$, $mA<\delta$时，$\left|\int_A f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{6}$. 于是 $A\subset E$, $mA<\delta$ 时，

$$\int_A|f(x)|dx<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{9}$$

若 i 充分大，使$\frac{1}{2^i}<\min\left\{\frac{\varepsilon}{3},\delta\right\}$，则当 $n\geqslant N_i$ 时，从 $mE_n(i)<\frac{\delta_i}{2}$

$\leqslant\frac{1}{2^{i+1}}$知 $mE_n(i)<\delta$,因此由 $E_n(i)$的定义、(7)式和(9)式得

$$\left|\int_E f_n(x)dx-\int_E f(x)dx\right|\leqslant\int_E |f_n(x)-f(x)|dx$$

$$\leqslant\int_{E-E_n(i)}|f_n(x)-f(x)|dx+\int_{E_n(i)}|f_n(x)|dx$$

$$+\int_{E_n(i)}|f(x)|dx<\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2^{i+2}}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon.$$

这证明了$\int_E f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx$. 证完.

定理 7(Lebesgue 控制收敛定理)

设

(1) $F(x)$是在E上可积的;

(2) $f_n(x), n=1,2,3,\cdots$都在E上可测且

$$|f_n(x)|\leqslant F(x)\quad (x\in E).$$

(3) 在E上$f_n(x)\Rightarrow f(x)$或$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ a.e., 则$f(x)$在E上可积且

$$\int_E f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

证明 由条件 (2)和(3)(及 Riesz定理)知也有$|f(x)|\leqslant F(x)$ a.e.于E. 所以$f(x), f_n(x), n=1,2,\cdots$, 都在$E$上可积. 对任意给定的$\varepsilon>0$,取$m$充分大,使

$$0\leqslant\int_{E-E_m}F(x)\,dx=\int_E F(x)\,dx-\int_{E_m}F(x)\,dx<\frac{\varepsilon}{4},\qquad(10)$$

此处$E_m=E[x;\|x\|\leqslant m]$. 由于对$E_m$的任意可测子集$A$,都有

$$\left|\int_A f_n(x)dx\right|\leqslant\int_A\left|f_n(x)\right|dx\leqslant\int_A F(x)dx.$$

由定理 5 可知$\{f_n(x)\}$是在E_m上积分等度绝对连续的函数序列. 注意在E_m上还有$f_n(x)\Rightarrow f(x)$. 应用 Vitali 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_m}f_n(x)dx=\int_{E_m}f(x)dx.$$

所以有 N，使 $n\geqslant N$ 时

$$\left|\int_{E_m} f_n(x)dx-\int_{E_m} f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是由(10)式即知当 $n\geqslant N$ 时，

$$\left|\int_E f_n(x)dx-\int_E f(x)dx\right|\leqslant\int_{E-E_m}|f_n(x)|dx+\int_{E-E_m}|f(x)|dx$$

$$+\left|\int_{E_m} f_n(x)dx-\int_{E_m} f(x)dx\right|$$

$$<2\int_{E-E_m}F(x)\,dx+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

可见

$$\int_E f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

推论 1(Lebesgue 有界收敛定理) 如果

(1) $mE<+\infty$,

(2) $f_n(x)$, $n=1,2,3,\cdots$ 在 E 上可测且

$$|f_n(x)|\leqslant K\quad(x\in E),$$

其中 K 为一与 n 无关的常数，

(3) 在 E 上 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$,

则 $f(x)$ 在 E 上可积且

$$\int_E f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

证明 因为 $mE<+\infty$，所以只要在定理 7 中取 $F(x)\equiv K$ 便可. 应该指出，如果条件 (3) 是 $f_n(x)\to f(x)$ a.e. 于 E，则定理的结论是容易从 Egoroff 定理看到和得到证明的.

例 3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^2}dx=0$.

证明 因为 $2nx\leqslant 1+n^2x^2$，所以

$$0\leqslant\frac{nx}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{1}{2}.$$

又在[0,1]上显然有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}=0$. 所以由上述推论1即知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^2}dx=\int_0^1 0\ dx=0.$$

例4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}dx=0$.

证明 显然在[0, 1]上有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}=0$, 令

$$f_n(x)=\frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2},\ F(x)=\frac{2}{\sqrt{x}},$$

则

$$F(x)-f_n(x)=\frac{2+(2\sqrt{nx}-1)n^{3/2}x^{3/2}}{\sqrt{x}\,(1+n^2x^2)}.$$

当$\frac{1}{4n}<x\leqslant 1$时, $2+(2\sqrt{nx}-1)n^{3/2}x^{3/2}$ 显然是大于零的, 当$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{4n}$时,

$$2+(2\sqrt{nx}-1)n^{3/2}x^{3/2}\geqslant 2-n^{3/2}x^{3/2}\geqslant 2-n^{3/2}\left(\frac{1}{4n}\right)^{3/2}>0.$$

所以在[0,1]上处处有 $0\leqslant f_n(x)\leqslant F(x)$. 注意 $F(x)$在[0, 1]上可积,故由控制收敛定理,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}dx=\int_0^1 0\ dx=0.$$

由于$\frac{nx}{1+n^2x^2}$ 在 $x=\frac{1}{n}\in[0,\ 1]$处取值恒为$\frac{1}{2}$, 所以在[0,1]上 $\left\{\frac{nx}{1+n^2x^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\left\{n^{3/2}x/(1+n^2x^2)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 在[0,1]上都是不一致收敛于零的.

作为本节的结尾,我们来证明一个有关函数的 Riemann 可积

性的结果.

定理 8 如果$f(x)$是区间$[a, b]$上的有界函数，则$f(x)$在$[a,b]$上 Riemann 可积的充要条件是它在$[a, b]$中的不连续点所构成的集合D的测度为零.

证明 令Δ_n代表将$E=[a,b]$分为2^n等分的分划:

Δ_n: $a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{2^n}^{(n)}=b$.

$M_i^{(n)}=\sup\limits_{x\in[x_{i-1}^{(n)},\ x_i^{(n)}]} f(x)$, $m_i^{(n)}=\inf\limits_{x\in[x_{i-1}^{(n)},\ x_i^{(n)}]} f(x)$, $i=1, 2,\cdots,2^n$.

$$\psi_n^{(1)}(x)=\sum_{i=1}^{2^n} M_i^{(n)}\varphi_{[x_{i-1}^{(n)},\ x_i^{(n)})},$$

$$\psi_n^{(2)}(x)=\sum_{i=1}^{n} m_i^{(n)}\varphi_{[x_{i-1}^{(n)},\ x_i^{(n)})}.$$

其中$\varphi_{[x_{i-1}^{(n)},\ x_i^{(n)})}(x)$为$[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)})$的示性函数，则$f(x)$关于$\Delta_n$的 Riemann 大、小和$\bar{S}_{\Delta_n}$, $\bar{s}_{\Delta_n}$之差

$$\bar{S}_{\Delta_n}-\bar{s}_{\Delta_n}=\int_a^b\{\psi_n^{(1)}(x)-\psi_n^{(2)}(x)\}\,dx, \tag{11}$$

由于Δ_n的分点都是Δ_{n+1}的分点，所以

$$\psi_n^{(1)}(x)\geqslant\psi_{n+1}^{(1)}(x)\geqslant f(x)\geqslant\psi_{n+1}^{(2)}(x)\geqslant\psi_n^{(2)}(x).$$

设 $B(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n^{(1)}(x)$, $b(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n^{(2)}(x)$，则

$$b(x)\leqslant f(x)\leqslant B(x).$$

如果$f(x)$在$[a,b]$上 Riemann 可积，则$\lim\limits_{n\to\infty}(\bar{S}_{\Delta_n}-\bar{S}_{\Delta_n})=0$.

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\{\psi_n^{(1)}(x)-\psi_n^{(2)}(x)\}\,dx=0. \tag{12}$$

对正整数 m，令 $E_m=E\left[x;\ B(x)-b(x)\geqslant\frac{1}{m}\right]$，从

$$B(x)-b(x)\leqslant\psi_n^{(1)}(x)-\psi_n^{(2)}(x),\ n=1,2,3\cdots$$

立即知道

$$\frac{1}{m}mE_m\leqslant\int_a^b\{B(x)-b(x)\}\,dx\leqslant\int_a^b\{\psi_n^{(1)}(x)-\psi_n^{(2)}(x)\}\,dx.$$

由(12)式，对任给的 m 都有 $mE_m=0$. 而

$$E[x;\ B(x)-b(x)>0]=\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m,$$

所以 $mE[x;B(x)-b(x)>0]=0$. 这说明

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n^{(1)}(x)=\lim_{n\to\infty}\psi_n^{(2)}(x)=f(x)\ \text{ a. e.}$$

令 D_0 表示全体使上式不成立的点和全体 Δ_n 的分点所构成的集合，则 $mD_0=0$. 如果 $x_0\overline{\in}D$, $x_0\in E=[a,b]$，则在 x_0 点

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n^{(1)}(x_0)=\lim_{n\to\infty}\psi_n^{(2)}(x_0)=f(x_0).$$

对任意 $\varepsilon>0$，选 n_0 充分大，使

$f(x_0)-\varepsilon<\psi_{n_0}^{(2)}(x_0)\leqslant\psi_{n_0}^{(1)}(x_0)<f(x_0)+\varepsilon.$

再注意 x_0 不是 Δ_{n_0} 的分点，便知有开区间 I，使 $x_0\in I$，且当 $x\in I$ 时.

$$f(x_0)-\varepsilon<\psi_{n_0}^{(2)}(x_0)\leqslant f(x)\leqslant\psi_{n_0}^{(1)}(x)<f(x_0)+\varepsilon.$$

这证明 $f(x)$ 在 x_0 点连续，$D\subset D_0$，于是 $mD\leqslant mD_0=0$. 这证明了必要性.

为证充分性我们注意当 $x_0\overline{\in}D$, $x_0\in E$ 时，对任意 $\varepsilon>0$，都有 $\delta>0$，使 $|x-x_0|<\delta$, $x\in E$ 时

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon/2.$$

若 n 充分大，使 $\frac{b-a}{2^n}<\delta$，则 Δ_n 中包含 x_0 的小区间 $[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)})$ 应包含在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内. 所以这时

$$0\leqslant\psi_n^{(1)}(x_0)-\psi_n^{(2)}(x_0)<\varepsilon,$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\{\psi_n^{(1)}(x_0)-\psi_n^{(2)}(x_0)\}=0$. 因此如果 $mD=0$, 则我们有

$$\lim_{n\to\infty}\{\psi_n^{(1)}(x)-\psi_n^{(2)}(x)\}=0\ \text{a.e. 于}\ E.$$

注意 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界,若 K 是 $|f(x)|$ 的一上界,则 $0\leqslant\psi_n^{(1)}(x)-\psi_n^{(2)}(x)\leqslant 2K$,于是由 Lebesgue 有界收敛定理及(11)式,知

$$\lim_{n\to\infty}(\bar{S}_{\Delta_n}-\bar{s}_{\Delta_n})=\lim_{n\to\infty}\int_E\{\psi_n^{(1)}(x)-\psi_n^{(2)}(x)]dx=0.$$

这也就证明了 $f(x)$ 在 $E=[a,b]$ 上是 Riemann 可积的. 所以 $mD=0$ 也是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的充分条件. 证完.

习　题

1. 设 $mE<+\infty$, $f(x)$ 在 E 上可测且几乎处处有限,

$$E_n=E[x;n-1\leqslant f(x)<n],\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

证明: $f(x)$ 在 E 上可积的充要条件是

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|n|mE_n<+\infty.$$

2. 证明 $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{1}{x}$ 分别在 $(0,\infty)$ 和 $(0,1)$ 上不可积.

3. 设 $f(x)$ 在 Riemann 意义下的广义积分 $\int_{a+}^{b}f(x)dx$ 是绝对收敛的,证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且 $\int_{[a,b]}f(x)dx=\int_{a+}^{b}f(x)dx$.

4. 设 $mE<+\infty$,证明如果 $f_n(x)$, $n=1,2,3,\cdots$ 都是 E 上的可积函数且在 E 上一致收敛于 $f(x)$,则 $f(x)$ 也在 E 上可积,并且

$$\int_E f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

5. 设 $\mathscr{F}$ 是一族在 E 上可积的函数, $\sup\limits_{f\in\mathscr{F}}\int_E|f(x)|dx<+\infty$. 证明 $\mathscr{F}$ 是积分等度绝对连续族的充要条件是对任意 $\varepsilon>0$, 都有 N 使

$$\sup_{f\in\mathscr{F}}\int_{E[x:|f(x)|>N]}|f(x)|dx\leqslant\varepsilon.$$

6. 证明

$$\int_{(0,1)}\frac{x^p}{1-x}\log\left(\frac{1}{x}\right)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(p+k)^2}\quad(p>-1),$$

$$\int_{(0,\infty)}\frac{\sin ax}{e^x-1}dx=\pi\left(\frac{1}{e^{2a\pi}-1}-\frac{1}{2a\pi}+\frac{1}{2}\right)\quad(a>0).$$

7. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,\infty)}\frac{dt}{\left(1+\frac{t}{n}\right)t^{1/n}}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,n)}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{a-1}dx=\int_{(0,\infty)}e^{-x}x^{a-1}dx.$$

8. 设 $f_n(x)(n=1,2,3,\cdots)$都是E上的可测函数，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_E|f_n(x)|dx<+\infty.$$

证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$E$几乎处处绝对收敛，其和函数在$E$上可积，并且

$$\int_E\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

9. 将[0,1]中全体有理数排成序列$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$，证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2|x-r_n|^{1/2}}$$

是在[0,1]上几乎处处收敛的.

10. 设$mE<+\infty$，证明在E上$f_n(x)\Rightarrow 0$的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\int_E\frac{f_n^2(x)}{1+f_n^2(x)}dx=0.$$

11. 设$f(x,t)$当$|t-t_0|<\delta$时是x在$[a,b]$上可积的函数，并且有常数K使

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right|\leqslant K\quad(|t-t_0|<\delta,x\in[a,b]).$$

证明

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,\ t)dx=\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dx.$$

12. **证明：** 如果 $f(x)$ 在 $E\subset\mathbb{R}^1$ 上可积，则对任意 $\varepsilon>0$，都有 $\mathbb{R}^1$ 上的连续函数 $g(x)$，使

$$\int_E |f(x)-g(x)|dx<\varepsilon.$$

如果 E 还是有界的，则上述 $g(x)$ 还可以要求是 x 的多项式.

13. **证明：** 如果 $f(x)$ 在 $(a-\varepsilon,b+\varepsilon)$ 上可积，$\varepsilon>0$ 为一常数，则

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx=0$$

（积分连续性）.

14. 设 $f(x)$ 在 E 上可积，$E_n\subset E$，$n=1,2,\cdots$ 是 E 的一串收敛的可测子集，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)dx=\int_{\lim\limits_{n\to\infty} E_n} f(x)dx.$$

15. 利用 Fatou 引理给出 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ a.e. 情况下的 Lebesgue 控制收敛定理的一个更直接更初等的证明.

（**提示：** 注意 $F(x)+f_n(x)$ 和 $F(x)-f_n(x)$ 都是非负可测函数，$n=1,2,3,\cdots$. 于是可以引用 Fatou 引理而证得

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx\geqslant\int_E f(x)dx$$

和

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_E f_n(x)dx\leqslant\int_E f(x)dx.\ )$$

§3 Fubini 定理

在 Riemann 积分理论中，我们曾经讨论过重积分与累次积分的关系，如果 I 是矩形 $[a,b;c,d]$，$f(x,y)$ 在 I 上连续，则

$$\iint_I f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy.$$

本节的中心问题，是要对 Lebesgue 积分建立相应的定理，即 Fubini 定理. 我们会发现在交换积分顺序这个问题上，Lebesgue

积分论中要求的条件也比 Riemann 积分论中的要求少得多，这是新积分方便之处.

为了建立 Fubini 定理，我们要进一步讨论乘积空间的测度问题，在第三章 §4 中，我们曾证明，如果 A 和 B 分别是 $\mathbf{R}^p$ 和 $\mathbf{R}^q$ 中的可测集合，则 $A\times B$ 便是 $\mathbf{R}^{p+q}$ 中的可测集合，$m(A\times B)=mA\cdot mB$. 又如果 E 是 $\mathbf{R}^{p+q}$ 中的可测集合，则几乎对于所有的 $x\in\mathbf{R}^p$，截口 E_x 都是 $\mathbf{R}^q$ 中的可测集合，现在我们要进一步证明下述定理:

定理 1 若 E 是 $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q=\mathbf{R}^{p+q}$ 中的可测集合，$m(x)=mE_x$，则 $m(x)$ 是在 $\mathbf{R}^p$ 上几乎处处有定义的可测函数，并且

$$mE=\int_{\mathbf{R}^p}m(x)\,dx.$$

证明 先考虑 E 为有界集的情形. 由第三章 §3 定理 3，有有界的 G_δ 型集合 $G=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$ 使 $G\supset E$, $mG=mE$，从

$$G=(G-E)\cup E,$$

得

$$G_x=(G-E)_x\cup E_x,$$
$$mG_x=m(G-E)_x+mE_x.$$

于是

$$m(x)=mE_x=mG_x-m(G-E)_x.$$

由于

$$m(G-E)=mG-mE=0.$$

所以从第三章 §4 定理 2,

$$m(G-E)_x=0 \text{ a.e. 于 } \mathbf{R}^p$$

可见作为 x 的函数 $m(G-E)_x$ 是非负可测的. 并且

$$\int_{\mathbf{R}^p} m(G-E)_x dx = 0.$$

于是我们只要能证明 mG_x 是 x 的可测函数且

$$\int_{\mathbf{R}^p} mG_x dx = mG$$

即可.

令 $G_n^* = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$，则 G_n^* 仍为有界开集，$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n^*$ 且

$$G_1^* \supset G_2^* \supset \cdots \supset G_n^* \supset \cdots,$$

于是

$$G_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} (G_n^*)_x,$$

$$(G_1^*)_x \supset (G_2^*)_x \supset \cdots \supset (G_n^*)_x \supset \cdots.$$

所以

$$mG_x = \lim_{n\to\infty} m(G_n^*)_x.$$

如果我们能证明 $m(G_n^*)_x$ 是 x 的可测函数，并且

$$\int_{\mathbf{R}^p} m(G_n^*)_x dx = mG_n^*,$$

则由第三章§2 定理 6 和 Levi 定理

$$mG = \lim_{n\to\infty} mG_n^* = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^p} m(G_n^*)_x dx$$

$$= \int_{\mathbf{R}^p} \lim_{n\to\infty} m(G_n^*)_x dx = \int_{\mathbf{R}^p} mG_x dx.$$

以下我们就来证明 $m(G_n^*)_x$ 是 x 的可测函数和等式 $\int_{\mathbf{R}^p} m(G_n^*)_x dx = mG_n^*$.

G_n^* 是有界开集，所以可以表成可数多个互不相交的左开右闭区间 $I_i^{(n)}$，$i=1,2,\cdots$的并(第三章§3 引理)：

$$G_n^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^{(n)}, I_i^{(n)} \cap I_j^{(n)} = \phi \quad (i \neq j).$$

显然 $(G_n^*)_x = \bigcup_{i=1}^{\infty} (I_i^{(n)})_x$，所以

$$m(G_n^*)_x = \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i^{(n)})_x. \tag{1}$$

$I_i^{(n)}$ 是区间，$m(I_i^{(n)})_x$ 显然是 x 的简单函数（$(I_i^{(n)})_x$ 是 $\mathbf{R}^q$ 中一区间或者为空集），并且

$$\int_{\mathbf{R}^p} m(I_i^{(n)})_x dx = |I_i^{(n)}| = mI_i^{(n)}.$$

于是由(1)式知 $m(G_n^*)_x$ 是 x 的可测函数，而且根据 Lebesgue 基本定理，还有

$$\int_{\mathbf{R}^p} m(G_n^*)_x dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^p} m(I_i^{(n)})_x dx$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} mI_i^{(n)} = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^{(n)}\right) = mG_n^*.$$

这正是我们所要证明的事实.

再考虑 E 是无界可测集合的情形.

$$E_m = E[x; \|x\| \leqslant m],$$

则 E_m 是 E 的有界可测子集，

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m, \quad E_m \subset E_{m+1} \quad (m \geqslant 1).$$

因此

$$E_x = \bigcup_{m=1}^{\infty} (E_m)_x, (E_m)_x \subset (E_{m+1})_x \quad (m \geqslant 1).$$

从而对于 $\mathbb{R}^p$ 中使 $(E_m)_x$ 都可测的 x,

$$mE_x = \lim_{m\to\infty} m(E_m)_x,$$

而由前段证明, $m(E_m)_x$ 是 x 的几乎处处有定义的可测函数, 且

$$\int_{\mathbb{R}^p} m(E_m)_x dx = mE_m.$$

因此, mE_x 也是 x 的可测函数, 并且

$$\int_{\mathbb{R}^p} mE_x dx = \int_{\mathbb{R}^p} \lim_{m\to\infty} m(E_m)_x dx$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p} m(E_m)_x dx$$

$$= \lim_{m\to\infty} mE_m = mE.$$

证完.

现在我们来证明 Fubini 定理.

定理 2(**Fubini 定理**) 设 $f(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^{p+q}=\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 上的可积函数. 则

(1) 几乎对所有的 $x\in\mathbb{R}^p$, $f(x, y)$ 是 y 的可积函数;

(2) 几乎处处有定义的函数

$$g(x)=\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y)\,dy$$

是在 $\mathbb{R}^p$ 上可积的;

(3) 有等式

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^p} dx \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y)\,dy.$$

证明 我们分两步来证明.

1° 设 $f(z)$ 是非负可测函数, 其下方图形是 $G=G(\mathbb{R}^{p+q}; f)$, 则

$$mG=\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(z)\,dz. \tag{1}$$

既然 $f(z)$ 可积，自然应有 $mG<+\infty$.

从定理 1，mG_x 应是 x 的几乎处处有定义的可测函数，且

$$mG=\int_{\mathbb{R}^p} mG_x dx. \tag{2}$$

从而由§2 定理 3，

$$mG_x<+\infty \text{ a.e. 于 } \mathbb{R}^p.$$

可是 G_x 其实是固定 x，视 $f(x,y)$ 为 y 的函数时的下方图形，因此由第四章§1 定理 1，我们已证明几乎对所有的 x，$f(x,y)$ 作为 y 的函数是非负可测的，并且根据§1 定理 3 还有

$$\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy=mG_x \text{ a.e. 于 } \mathbb{R}^p.$$

再结合(1)、(2)两式便得

$$mG=\int_{\mathbb{R}^p} dx\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy=\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(z)\,dz.$$

所以对于非负可测函数定理已得证.

2° 设 $f(z)$ 是一般的可积函数，设 $f^+(z)$ 和 $f^-(z)$ 是它的正部和负部，由于 $f(z)$ 可积，所以 $f^+(z)$，$f^-(z)$ 都是可积的，$f(x,y)=f^+(x,y)-f^-(x,y)$ 且

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(z)dz=\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^+(z)dz-\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^-(z)dz. \tag{3}$$

从 1°，几乎对于所有的 $x\in\mathbb{R}^p$，$f^+(x,y)$ 和 $f^-(x,y)$ 都是 y 的在 $\mathbb{R}^q$ 上可积的函数. 于是 $f(x,y)$ 也几乎对所有的 $x\in\mathbb{R}^p$ 是 y 的在 $\mathbb{R}^q$ 上可积的函数. 又因

$$g_1(x)=\int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\,dy,$$

$$g_2(x)=\int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\,dy$$

都是在 $\mathbb{R}^p$ 上几乎处处定义的可积函数，所以

$$g(x)=g_1(x)-g_2(x)=\int_{\mathrm{R}^q}f(x,y)\,dy.$$

最后由(3)式

$$\int_{\mathrm{R}^{p+q}}f(z)\,dz=\int_{\mathrm{R}^{p+q}}f^+(z)\,dz-\int_{\mathrm{R}^{p+q}}f^-(z)\,dz$$

$$=\int_{\mathrm{R}^p}dx\int_{\mathrm{R}^q}f^+(x,y)\,dy-\int_{\mathrm{R}^p}dx\int_{\mathrm{R}^q}f^-(x,y)\,dy$$

$$=\int_{\mathrm{R}^p}dx\left\{\int_{\mathrm{R}^q}f^+(x,y)\,dy-\int_{\mathrm{R}^q}f^-(x,y)\,dy\right\}$$

$$=\int_{\mathrm{R}^p}dx\int_{\mathrm{R}^q}f(x,y)\,dy.$$

定理证完.

推论 1 若 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^{p+q}=\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 上可积,则

$$\int_{\mathrm{R}^p}dx\int_{\mathrm{R}^q}f(x,y)\,dy=\int_{\mathrm{R}^q}dy\int_{\mathrm{R}^p}f(x,y)\,dx.$$

推论 2 若 $f(z)$ 非负可测,则

(1) 几乎对所有的 $x\in\mathbb{R}^p$, $f(x,y)$ 都是 y 的非负可测函数.

(2) 有等式

$$\int_{\mathrm{R}^{p+q}}f(z)\,dz=\int_{\mathrm{R}^p}dx\int_{\mathrm{R}^q}f(x,y)\,dy=\int_{\mathrm{R}^q}dy\int_{\mathrm{R}^p}f(x,y)\,dx.$$

证明 从定理 2 之证明中的 1° 可得.

推论 3 设 $f(z)$ 是在 $\mathbb{R}^{p+q}$ 上可测的, 如果几乎对于所有的 $x\in\mathbb{R}^p$, $|f(x,y)|$ 都关于 y 可积,并且

$$\int_{\mathrm{R}^p}dx\int_{\mathrm{R}^q}|f(x,y)|\,dy<+\infty,$$

则 $f(z)$ 是在 $\mathbb{R}^{p+q}$ 上可积的.

证明 留作习题.

例 如果 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的可测函数,则 $f(x-y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的可测函数.

证明 我们要证明对任意 $a\in\mathbb{R}$, $E=\{(x,y);f(x-y)>a\}$ 都

是 $\mathbb{R}^2$ 中的可测集合. 令 $A=\{x;f(x)>a\}$, $\varphi(x, y)=x-y$, 则 A 是 $\mathbb{R}^1$ 中的可测集合, $E=\varphi^{-1}(A)$(参考第四章§1习题的第10题)而且 φ 还是从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^1$ 的连续函数. 这说明我们只要能证明对 $\mathbb{R}^1$ 中的任意可测集 A, $\varphi^{-1}(A)$ 都是 $\mathbb{R}^2$ 中的可测集, 即证明当 $A\subset\mathbb{R}^1$ 可测时 $\{(x, y); x-y\in A\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的可测集即可. 当 A 是 $\mathbb{R}^1$ 中的 Borel 集时, $\varphi^{-1}(A)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的 Borel 集,(见上述习题.)当然是可测的. 如果 A_0 是 $\mathbb{R}^1$ 中一测度为零的 Borel 集, $B=\varphi^{-1}(A_0)$, $\varphi_B(x,y)$ 是 B 的示性函数, 则 $\varphi_B(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的非负可测函数.

$$mB=\int_{\mathbb{R}^2}\varphi_B(x,y)d(x,y)$$

是由推论 2 及 $m(y+A_0)=mA_0=0$ 有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\varphi_B(x, y)d(x, y)&=\int_{\mathbb{R}^1}dy\int_{\mathbb{R}^1}\varphi_B(x,y)dy\\&=\int_{\mathbb{R}^1}dy\int_{y+A_0}1dx=\int_{\mathbb{R}^1}m(y+A_0)\,dy=\int_{R^1}0dy=0.\end{aligned}$$

所以 $mB=0$. 由于对 $\mathbb{R}^1$ 中任意测度为零的集合 A, 都有 G_δ 型集(当然是 Borel 集) $A_0\supset A$ 使 $mA_0=mA=0$(第三章§3 定理 3), 而 $\varphi^{-1}(A)\subset\varphi^{-1}(A_0)$, $m\varphi^{-1}(A_0)=0$, 所以 $\varphi^{-1}(A)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的外测度为零的集合, 从而是可测的. 现设 A 是 $\mathbb{R}^1$ 中的一般的可测集, 由第三章§3 定理 4, 可取 F_σ 集(当然是 Borel 集) $F\subset A$, 使 $m(A-F)=0$. 于是从

$$\varphi^{-1}(A)=\varphi^{-1}(F)\cup\varphi^{-1}(A-F)$$

便知 $\varphi^{-1}(A)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的可测集. 证完.

习　题

1. 证明推论 3.

2. 证明当 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^p$ 上可积, $g(y)$ 在 $\mathbb{R}^q$ 上可积时, $f(x)g(y)$ 在 $\mathbb{R}^{p+q}$ 上可积.

3. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^{p+q}$ 上非负可测. 证明：如果对每一 $x\in\mathbb{R}^p$, $f(x,y)$ 都在 $\mathbb{R}^q$ 上几乎处处有限，则几乎对所有的 $y\in\mathbb{R}^q$, $f(x,y)$ 都在 $\mathbb{R}^p$ 上几乎处处有限.

4. 设 $f(x,y)$ 在 $E=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上可积，证明

$$\int_0^1\left(\int_0^x f(x,y)dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_y^1 f(x,y)dx\right)dy.$$

5. 设 $f(x),g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)\leqslant g(x)(a\leqslant x\leqslant b)$, 证明

$$E=\{(x,y);a\leqslant x\leqslant b,f(x)\leqslant y\leqslant g(x)\}$$

是 $\mathbb{R}^2$ 中的可测集合，并且对于任意在 E 上连续的 $h(x,y)$，都有

$$\int_E h(z)dz=\int_a^b dx\int_{f(x)}^{g(x)}h(x,y)dy.$$

6. 证明

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & 当\ x^2+y^2>0,\\ 0 & ,当\ x=y=0,\end{cases}$$

在 $E=\{(x,y);\ -1\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1\}$ 上是不可积的. 但这时推论 1 中的两个累次积分都存在且相等.

7. 证明：如果

$$f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\quad(0<x<1,0<y<1),$$

则

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy\neq\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx.$$

这是否与 Fubini 定理相冲突?

§4 微分与不定积分

在数学分析中，我们知道微分运算与积分运算是互逆的:

I. 对于给定的连续函数 $f(x)$, 它的带有任意常数的不定积分

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt+C \tag{1}$$

是 x 的可微函数，并且处处有

$$F'(x)=f(x). \tag{2}$$

II. 如果 $F(x)$ 是具有连续导数的函数,

$$f(x)=F'(x),$$

则等式

$$\int_a^x f(t)\,dt=F(x)+C \tag{3}$$

成立. 此处 C 是某一常数 $(C=-F(a))$.

现在我们有了 Lebesgue 积分理论,它可以适用于许多非连续函数. 于是发生这样两个问题:

问题 I 如果(1)中的函数 $f(x)$ 只是可积的, 那么等式(2)是否成立? 由于可积函数可以在一个测度为零的点集上任意改变它的值而不影响它的积分,所以在讨论问题 I 时, 自然只应要求(2)式是几乎处处成立而不应是处处成立.

问题 II 在什么情况下, 给定的函数 $F(x)$ 具有可积的导函数 $f(x)$ 并且使(3)式成立? 当然, 我们现在也可以只要求 $F(x)$ 的导函数是在几乎处处的意义下存在.

今后我们还是像在数学分析中一样,把(1)式中的

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt+C$$

称为可积函数 $f(x)$ 的**不定积分**. 此处当 $x<a$ 时, 积分 $\int_a^x f(t)\,dt$ 仍然理解为 $\int_{[x,a]} f(t)\,dt$. 我们将从问题 II 入手. 为此我们先介绍一个定义和一个预备定理.

定义 1 设 E 是 $\mathbb{R}^1$ 中的一个点集, $\mathscr{S}$ 是 $\mathbb{R}^1$ 中一族区间(不一定是开的),如果对任意 $x\in E$ 及任意 $\varepsilon>0$, 都有 $I\in\mathscr{S}$, 使 $x\in I$ 且 $0<|I|<\varepsilon$, 则称 $\mathscr{S}$ 是 E 的一个 **Vitali 覆盖**.

引理 1(Vitali 覆盖引理) 如果 $m^*E<+\infty$, $\mathscr{S}$ 是 E 的一个

Vitali 覆盖，则对于任意 $\varepsilon>0$，都可以从 $\mathscr{I}$ 中选出有限多个互不相交的区间 $I_1,\cdots,I_n$ 来，使得

$$m^*\left(E-\bigcup_{i=1}^{n}I_i\right)<\varepsilon.$$

(与 Borel 有限覆盖定理相比较，不妨称这个结果为差不多覆盖定理).

证明 由于 $m^*E<+\infty$，我们可取开集 $G\supset E$ 使 $mG<+\infty$. 又如果区间 I 含有点 x，则必可作一闭区间 $I_1\subset I$ 使 $x\in I_1$，所以我们不妨设 $\mathscr{I}$ 中的区间都是闭的. 令

$$\mathscr{I}_1=\{I;I\in\mathscr{I},I\subset G\}.$$

由于 G 是开集，$\mathscr{I}$ 是 E 的 Vitali 覆盖，所以 $\mathscr{I}_1$ 仍为 E 的 Vitali 覆盖.

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，任意取定一个属于 $\mathscr{I}_1$ 的区间记为 I_1，如果已有

$$m^*(E-I_1)<\varepsilon.$$

则证明已可完成. 如果 $m^*(E-I_1)\geqslant\varepsilon$，则有 $x\in E$，使 $\rho(x,I_1)>0$. 由 Vitali 覆盖的定义便知应有 $I_2^*\in\mathscr{I}_1$ 使

$$x\in I_2^*,\quad 0<|I_2^*|<\rho(x,I_1).$$

显然 $I_2^*\cap I_1=\varnothing$. 令

$$\delta_1=\sup\{|I|;\ I\in\mathscr{I}_1,I\cap I_1=\varnothing\},$$

则 $0<\delta_1\leqslant mG<+\infty$. 取 $I_2\in\mathscr{I}_1$，使

$$I_2\cap I_1=\varnothing,\quad |I_2|>\frac{1}{2}\delta_1.$$

一般说来，如已作出 $I_1,I_2,\cdots,I_k$ 而仍有

$$m^*\left(E-\bigcup_{i=1}^{k}I_i\right)\geqslant\varepsilon,\tag{4}$$

则由于$\bigcup_{i=1}^{k} I_i$是闭集，$E-\bigcup_{i=1}^{k} I_i \neq \varnothing$，和$\mathscr{I}_1$是$E$的Vitali覆盖知

$$\{I; I\in\mathscr{I}_1, |I|>0, I\cap I_j=\varnothing, j=1,2,\cdots,k\}$$

是非空的．从而

$$0<\delta_k \triangleq \sup\{|I|; I\in\mathscr{I}_1, |I|>0, I\cap I_j=\varnothing, i=1, \cdots, k\}$$
$$\leqslant mG<+\infty.$$

因此我们可以从$\mathscr{I}_1$中选出一I_{k+1}使$|I_{k+1}|>\frac{\delta_k}{2}$且$I_{k+1}\cap I_j=\varnothing$，$j=1,2,\cdots,k$；我们来证明这个过程必在某一步终止而得到所需要的$I_1,\cdots,I_n$来．

设不然，则由归纳法，便会得到一串包含于G内的互不相交的闭区间

$$I_1, I_2, \cdots, I_n, \cdots$$

使对一切n都有

$$\delta_n=\sup\{|I|; I\in\mathscr{I}_1, I\cap I_j=\varnothing, j=1,\cdots,n\}. \tag{5}$$

$$|I_{n+1}|>\delta_n/2. \tag{6}$$

$$m^*\left(E-\bigcup_{i=1}^{n} I_i\right)\geqslant\varepsilon. \tag{7}$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|=m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right)\leqslant mG<+\infty,$$

所以$|I_n|\to 0$，$\delta_n<2|I_{n+1}|\to 0(n\to\infty)$．设$n_0$充分大，使得

$$\sum_{n_0+1}^{\infty}|I_n|<\frac{\varepsilon}{5}.$$

对于任意$x\in E-\bigcup_{i=1}^{n_0} I_i$，因$\rho\left(x, \bigcup_{i=1}^{n_0} I_i\right)>0$及$\mathscr{I}_1$是$E$的Vitali覆

盖，应有$I\in\mathscr{I}_1$使

$$x\in I,\ |I|>0,\ I\cap I_i=\varnothing,\ i=1,2,\cdots,n_0 \tag{8}$$

由(5)和(6)式知$|I|\leqslant\delta_{n_0}<2|I_{n_0+1}|$. 设$m$是使$\delta_m<|I|$成立的正整数，则$I$必至少与$I_1$，$I_2,\cdots$，$I_m$中的一个相交. 令$j_0=\min\{i; I\cap I_i\neq\varnothing, i=1,2,\cdots,m\}$，则

$$I\cap I_j=\varnothing,\ j=1,2,\cdots,j_0-1.$$

由(5)式，$|I|\leqslant\delta_{j_0-1}<2|I_{j_0}|$，从而由(8)式$j_0>n_0$，如果$I_{j_0}$的中心是$x_{j_0}$，$\alpha\in I\cap I_{j_0}\neq\varnothing$，则

$$|x_{j_0}-x|\leqslant|x-\alpha|+|\alpha-x_{j_0}|\leqslant|I|+\frac{1}{2}|I_{j_0}|<\frac{5}{2}|I_{j_0}|,\ 令$$

$$I_{j_0}^*=\left(x_{j_0}-\frac{5}{2}|I_{j_0}|,\ x_{j_0}+\frac{5}{2}|I_{j_0}|\right),$$

则$x\in I_{j_0}^*$，因此我们如果对每一I_i，$i>n_0$，都作开区间

$$I_i^*=\left(x_i-\frac{5}{2}|I_i|,\ x_i+\frac{5}{2}|I_i|\right),$$

其中x_i为I_i的中心点，则

$$\bigcup_{i=n_0+1}^{\infty}I_i^*\supset E-\bigcup_{i=1}^{n_0}I_i.$$

而
$$\sum_{i=n_0+1}^{\infty}|I_i^*|=\sum_{i=n_0+1}^{\infty}5|I_i|<\varepsilon.$$

所以$m^*\left(E-\bigcup_{i=1}^{n_0}I_i\right)<\varepsilon$. 这与(7)式矛盾.

定义 2 设$f(x)$是在$[a,b]$上定义的函数，$x_0\in[a,b]$，于任意$\delta>0$，令①

$$M_\delta(x_0)=\sup_{\substack{x\in[a,b]\\0<|x-x_0|<\delta}}[f(x)],\ m_\delta(x_0)=\inf_{\substack{x\in[a,b]\\0<|x-x_0|<\delta}}[f(x)],$$

① $M_\delta(x_0)$和$m_\delta(x_0)$可以分别取$+\infty$和$-\infty$为值.

则 M_δ 是随 δ 的减小而不增的，m_δ 则是随 δ 的减小而不减的. 因而当 $\delta\to 0^+$ 时有极限，我们分别称此极限为($x\to x_0$ 时) $f(x)$ 的上极限及下极限，记作 $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)$ 和 $\underline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)$.

定义 3 于函数 $f(x)$，及定点 x_0，定义

$$D^+f(x_0)=\overline{\lim_{h\to 0+}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

$$D_+f(x_0)=\underline{\lim_{h\to 0+}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

$$D^-f(x_0)=\overline{\lim_{h\to 0-}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

$$D_-f(x_0)=\underline{\lim_{h\to 0-}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

D^+,D_+,D^-,D_- 分别称为 $f(x)$ 的右上，右下，左上，左下导数. 显然，如果 $f(x)$ 在 x_0 点有导数 $f'(x_0)$，则 $f'(x_0)=D^+f(x_0)=D^-f(x_0)=D_+f(x_0)=D_-f(x_0)$，反之，如果这四个导数都相等，则 $f(x)$ 在 x_0 有导数，其导数 $f'(x_0)$ 即等于这四个导数的共同值，当 $f'(x_0)$ 有限时，称 $f(x)$ 在 x_0 点可微.

引理 2 $D^+(-f)=-D_+f, D^-(-f)=-D_-f$. 又若 $y=-x$，$g(x)=-f(y)$，则 $D^+g(x)=D^-f(y), D_+g(x)=D_-f(y)$.

［证明］ 这都是显然的事实.

定理 1(Lebesgue) 如果 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微，$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且

$$\left|\int_a^b f'(x)dx\right|\leqslant|f(b)-f(a)|. \tag{9}$$

证明 我们不妨设 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上单调不减. 我们要证明的第一个结论是

$$-\infty<D_-f(x)=D^-f(x)=D_+f(x)=D^+f(x)<+\infty \text{ a.e.}$$

注意 $D_+f(x)\leqslant D^+f(x)$，$D_-f(x)\leqslant D^-f(x)$. 故又只需证明：

1° $D^-f(x) \leqslant D_-f(x)$, $D^-f(x) \leqslant D_+f(x)$ a.e.

2° $m\{x; a<x<b, D^+f(x)=\pm\infty\}=0$.

因为这时从 1° 与四种导数的定义将有

$D^+f(x) \leqslant D_-f(x) \leqslant D^-f(x) \leqslant D_+f(x) \leqslant D^+f(x)$ a.e.

此外，若已证出

$$D^+f(x) \leqslant D_-f(x) \text{ a.e.}, \tag{10}$$

则当令 $g(x)=-f(-x)$时，$g(x)$也是单调不减的函数，因此便也有

$$D^+g(x) \leqslant D_-g(x) \text{ a.e.} \tag{11}$$

由引理 2，

$$D^+g(x)=D^+(-f(y))=-D_+f(y).$$

$$D_-g(x)=D_-(-f(y))=-D^-f(y).$$

代入(10)式，则得$-D_+f(y) \leqslant -D^-f(y)$ a.e，从而得

$$D^-f(y) \leqslant D_+f(y) \text{ a.e.}$$

可见我们只要证明(10)与 2° 即可.

为证(10)式，即求证

$$E_1=\{x;\ D^+f(x)>D_-f(x), a<x<b\}$$

的测度为零. 用 $\mathbf{Q}^+$表示全体正有理数的集合，对 $r, s \in \mathbf{Q}^+$，令

$$E_{r,s}=\{x;\ a<x<b, D^+f(x)>r>s>D_-f(x)\}.$$

我们来证明恒有 $mE_{r,s}=0$. 因为 $E_1=\bigcup\limits_{r,s\in\mathbf{Q}^+}E_{r,s}$，所以这相当于证明了 $mE_1=0$.

设不然，即有 $r, s \in \mathbf{Q}^+$，使 $m^*E_{r,s}>0$. 于是对任意 $\varepsilon>0$，都可作开集 $G \supset E_{r,s}$，使 $mG<(1+\varepsilon)m^*E_{r,s}$. 对 $x \in E_{r,s}$，因 $D_-f(x)<s$，对任意 $\delta>0$，都可选 h 使 $0<h<\delta$ 且

$$\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}<s, [x-h, x] \subset G.$$

令

$$\mathscr{I}_1=\{[x-h,\ x];\ x\in E_{r,s},\ \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}<s, [x-h,x]\subset G\},$$

则 $\mathscr{I}_1$ 显然是 $E_{r,s}$ 的一个 Vitali 覆盖，由引理 1，可从 $\mathscr{I}_1$ 中选出有限多个互不相交的区间

$$[x_1-h_1, x_1], [x_2-h_2, x_2], \cdots, [x_k-h_k, x_k]$$

来，使得

$$m^*\left(E_{r,s}-\bigcup_{i=1}^{k}[x_i-h_i, x_i]\right)<\varepsilon.$$

于是

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{k}[x_i-h_i, x_i]\right)=\sum_{i=1}^{k}h_i\leqslant mG<(1+\varepsilon)m^*E_{r,s}. \tag{12}$$

$$m^*\left(E_{r,s}\cap\left(\bigcup_{i=1}^{k}[x_i-h_i, x_i]\right)\right)\geqslant m^*E_{r,s}$$

$$-m^*\left(E_{r,s}-\bigcup_{i=1}^{k}[x_i-h_i, x_i]\right)>m^*E_{r,s}-\varepsilon. \tag{13}$$

记 $E_{r,s}\cap\left(\bigcup_{i=1}^{k}(x_i-h_i, x_i)\right)$ 为 S. 因 $S\subset E_{r,s}$，对 $y\in S$，都有 $D^+f(y)>r$. 所以由 S 及 $D^+f(y)$ 的定义，对任意 $\delta>0$，都可选取 l 使 $0<l<\delta, \frac{f(y+l)-f(y)}{l}>r$ 且有某一(x_i-h_i, x_i)，$i\leqslant k$，完全包含$[y, y+l]$. 令

$$\mathscr{I}_2=\{[y, y+l];\ \frac{f(y+l)-f(y)}{l}>r,\ y\in S,\ \text{且有 } i\leqslant k,\ \text{使}$$
$$[y, y+l]\subset(x_i-h_i, x_i)\},$$

则 $\mathscr{I}_2$ 是 S 的一 Vitali 覆盖. 由引理 1，又可从 $\mathscr{I}_2$ 中选出有限多个互不相交的区间

$$[y_1, y_1+l_1], [y_2, y_2+l_2], \cdots, [y_t, y_t+l_t],$$

使得 $m^*\left(S-\bigcup_{j=1}^{t}[y_j,y_j+l_j]\right)<\varepsilon$. 从而由(13)式

$$\sum_{j=1}^{t} l_j=m\left(\bigcup_{j=1}^{t}[y_j,y_j+l_j]\right)$$

$$>m^*S-\varepsilon>m^*E_{r,s}-2\varepsilon.$$

注意从 $\mathscr{J}_2$ 的定义有

$$f(y_j+l_j)-f(y_j)>rl_j, j=1,2\cdots,t.$$

所以

$$\sum_{j=1}^{t}[f(y_j+l_j)-f(y_j)]>r\sum_{j=1}^{t}l_j>r(m^*E_{r,s}-2\varepsilon) \tag{14}$$

另一方面 $f(y)$ 是单调不减的且对每一 $[y_j,\ y_j+l_j]$ 都有 $i\leqslant k$ 使 $[y_j,y_j+l_j]\subset(x_i-h_i,x_i)$, 所以

$$f(y_j+l_j)-f(y_j)\leqslant f(x_i)-f(x_i-h_i).$$

从而由(12)式

$$\sum_{j=1}^{t}[f(y_j+l_j)-f(y_j)]\leqslant\sum_{i=1}^{k}[f(x_i)-f(x_i-h_i)]\leqslant\sum_{i=1}^{h}sh_i$$

$$<s(1+\varepsilon)m^*E_{r,s} \tag{15}$$

连结(14), (15)两式便得

$$r(m^*E_{r,s}-2\varepsilon)<s(1+\varepsilon)m^*E_{r,s}.$$

而 $\varepsilon>0$ 是任意的, 所以得

$$rm^*E_{r,s}\leqslant sm^*E_{r,s}.$$

这与 $r>s$ 相冲突, 这说明非有 $mE_{r,s}=0$ 不可, 这完成了 $mE_1=0$ 的证明.

现在已知 $f'(x)$ 是在 $[a,b]$ 上几乎处处有定义的, $0\leqslant f'(x)\leqslant+\infty$. 令

$$f_n(x)=\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{1/n}=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right], n=1,2,3,\cdots,$$

(此处我们规定当 $x>b$ 时，令 $f(x)=f(b)$)，则 $f_n(x)$ 是$[a, b]$上的非负可测函数且

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f'(x) \quad \text{a.e. 于}[a, b].$$

因此由 Fatou 引理

$$\int_a^b f'(x)\,dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

$$=\varliminf_{n\to\infty} n\int_a^b\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]dx$$

$$=\varliminf_{n\to\infty} n\left\{\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx-\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx\right\}$$

$$=f(b)-\varlimsup_{n\to\infty} n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx\leqslant f(b)-f(a)<+\infty.$$

这不仅证明了 2° 而且也证明了(9)式. 证完.

定义 4 设 $f(x)$ 是区间$[a,b]$上的一个函数，对于$[a,b]$的一个分划

$$\Delta: \qquad a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

令

$$\mathrm{V}(\Delta)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|,$$

称为 $f(x)$ 关于分划 Δ 的**变差**. 如果存在常数 M，使对一切分划 Δ 都有 $\mathrm{V}(\Delta)\leqslant M$，则称 $f(x)$ 为$[a, b]$上的**有界变差函数**. 由全体 $\mathrm{V}(\Delta)$ 所作成的数集的上确界称为 $f(x)$ 在$[a, b]$上的**总变差**，记为 $\mathrm{V}_a^b(f)$.

根据定义，易见闭区间$[a,b]$上的有限的单调函数 $f(x)$ 都是

有界变差的，而且其总变差即为$|f(b)-f(a)|$. 另外区间$[a,b]$上的两个有界变差函数的和、差、积仍为$[a,b]$上的有界变差函数.（习题的第1题）.

引理3 若$f(x)$在$[a,b]$上是有界变差的，$a<c<b$，则$f(x)$在$[a,c]$和$[c,b]$上也是有界变差的，并且有等式

$$\mathrm{V}_a^b(f)=\mathrm{V}_a^c(f)+\mathrm{V}_c^b(f). \tag{16}$$

证明 $f(x)$在$[a,c]$，$[c,b]$上有界变差是显然的，我们只要证明(16)式.

若

$$\Delta_1:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=c,$$

$$\Delta_2:\ c=x_0'<x_1'<\cdots<x_m'=b$$

分别是$[a,c]$和$[c,b]$上的分划，则

$$\Delta:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=x_0'<x_1'<\cdots<x_m'=b$$

是$[a,b]$上的一个分划. 并且

$$\mathrm{V}(\Delta_1)+\mathrm{V}(\Delta_2)=\mathrm{V}(\Delta)\leqslant\mathrm{V}_a^b(f).$$

可见

$$\mathrm{V}_a^c(f)+\mathrm{V}_c^b(f)\leqslant\mathrm{V}_a^b(f).$$

另一方面，设Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 是$[a,b]$的一个分划，如果有某一$x_i=c$，则Δ可以拆成$[a,c]$的一分划Δ_1和$[c,b]$的一分划Δ_2，而且

$$\mathrm{V}(\Delta)=\mathrm{V}(\Delta_1)+\mathrm{V}(\Delta_2)\leqslant\mathrm{V}_a^c(f)+\mathrm{V}_c^b(f);$$

如果没有$x_i=c$，则可将c点添入而得$[a,b]$的一新分划Δ'，显然

$$\mathrm{V}(\Delta)\leqslant\mathrm{V}(\Delta')\leqslant\mathrm{V}_a^c(f)+\mathrm{V}_c^b(f).$$

所以对于任何Δ，都有$\mathrm{V}(\Delta)\leqslant\mathrm{V}_a^c(f)+\mathrm{V}_c^b(f)$.

从而

$$\mathrm{V}_a^b(f)\leqslant\mathrm{V}_a^c(f)+\mathrm{V}_c^b(f).$$

证完.

对于$[a, b]$上的函数$f(x)$及分划Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 把$f(x)$关于Δ的变差$V(\Delta)$分为两部分:

$$V^+(\Delta)=\sum_{f(x_i)\geqslant f(x_{i-1})}[f(x_i)-f(x_{i-1})],$$

$$V^-(\Delta)=\sum_{f(x_i)<f(x_{i-1})}|f(x_i)-f(x_{i-1})|.$$

则

$$V^+(\Delta)+V^-(\Delta)=V(\Delta),$$
$$V^+(\Delta)-V^-(\Delta)=f(b)-f(a). \tag{17}$$

如果$f(x)$在$[a,b]$上是有界变差的, 则

$$\sup_\Delta V^+(\Delta)\leqslant\sup_\Delta V(\Delta)=V_a^b(f)<+\infty,$$
$$\sup_\Delta V^-(\Delta)\leqslant\sup_\Delta V(\Delta)=V_a^b(f)<+\infty,$$

我们把$\sup\limits_\Delta V^+(\Delta)$和$\sup\limits_\Delta V^-(\Delta)$分别称为$f(x)$在$[a,b]$上的**正变差**和**负变差**, 记为$\overset{+}{V}{}_a^b(f)$和$\overset{-}{V}{}_a^b(f)$. 由(17)式,

$$\overset{+}{V}{}_a^b(f)+\overset{-}{V}{}_a^b(f)\leqslant V_a^b(f).$$

我们来证明实际上有等式

$$\overset{+}{V}{}_a^b(f)+\overset{-}{V}{}_a^b(f)=V_a^b(f). \tag{18}$$

首先我们注意如果在一分划Δ中添加分点而成Δ', 则

$$V(\Delta)\leqslant V(\Delta'), V^+(\Delta)\leqslant V^+(\Delta'), V^-(\Delta)\leqslant V^-(\Delta')$$

因此如果$\Delta_n, \Delta_n', \Delta_n''$是$[a,b]$上的三个分划, 使

$$V_a^b(f)\geqslant V(\Delta_n)>V_a^b(f)-\frac{1}{n},$$

$$\overset{+}{V}{}_a^b(f)\geqslant V^+(\Delta_n')>\overset{+}{V}{}_a^b(f)-\frac{1}{n},$$

$$\overset{-}{V}{}_a^b(f)\geqslant V^-(\Delta_n'')>\overset{-}{V}{}_a^b(f)-\frac{1}{n},$$

而$\tilde{\Delta}_n$是合并$\Delta_n, \Delta'_n, \Delta''_n$的分点得到的新分划，则更

$$\mathrm{V}_a^b(f) \geqslant \mathrm{V}(\tilde{\Delta}_n) > \mathrm{V}_a^b(f) - \frac{1}{n},$$

$$\overset{+}{\mathrm{V}}{}_a^b(f) \geqslant \mathrm{V}^+(\tilde{\Delta}_n) > \overset{+}{\mathrm{V}}{}_a^b(f) - \frac{1}{n},$$

$$\overset{-}{\mathrm{V}}{}_a^b(f) \geqslant \mathrm{V}^-(\tilde{\Delta}_n) > \overset{-}{\mathrm{V}}{}_a^b(f) - \frac{1}{n},$$

而且

$$\mathrm{V}(\tilde{\Delta}_n) = \mathrm{V}^+(\tilde{\Delta}_n) + \mathrm{V}^-(\tilde{\Delta}_n),$$

$$\mathrm{V}^+(\tilde{\Delta}_n) - \mathrm{V}^-(\tilde{\Delta}_n) = f(b) - f(a).$$

令$n \to \infty$，便得(18)式，并且还有

$$\overset{+}{\mathrm{V}}{}_a^b(f) - \overset{-}{\mathrm{V}}{}_a^b(f) = f(b) - f(a). \tag{19}$$

对于$a \leqslant t \leqslant b$，由引理 3，$f(x)$在$[a, b]$上有界变差时，在$[a, t]$上也有界变差. 令

$$\mathrm{V}(t) = \mathrm{V}_a^t(f), \overset{+}{\mathrm{V}}(t) = \overset{+}{\mathrm{V}}{}_a^t(f), \overset{-}{\mathrm{V}}(t) = \overset{-}{\mathrm{V}}{}_a^t(t),$$

易见这都是在$[a, b]$上单调不减的函数. 由(19)式还得

$$f(t) = \overset{+}{\mathrm{V}}(t) + f(a) - \overset{-}{\mathrm{V}}(t), \quad a \leqslant t \leqslant b. \tag{20}$$

$\overset{+}{\mathrm{V}}(t) + f(a)$仍是$[a, b]$上的单调不减函数. 所以$f(t)$是两个单调不减函数之差.

定理 2 如果$f(x)$是区间$[a, b]$上有定义的函数，则

(1) $f(x)$在$[a, b]$上有界变差的充要条件是$f(x)$能表成两个单调不减函数之差；

(2) 若$f(x)$在$[a, b]$上有界变差，则$f(x)$在$[a, b]$上几乎处处可微，$f'(x)$在$[a, b]$上可积，并且

$$\int_a^b |f'(x)|\, dx \leqslant \mathrm{V}_a^b(f). \tag{21}$$

证明 由于两个单调不减函数之差是有界变差的，结合前面

已证明的(20)式,即知(1)成立.

由定理 1 及(1)知 $f(x)$在$[a,b]$上有界变差时,$f'(x)$一定在$[a,b]$上几乎处处存在,由(20)式,

$$f'(x)=\overset{+}{V}'(x)-\overset{-}{V}'(x)\ \text{a.e.}\ 于[a,b].$$

从而由(9)式及(18)式得

$$\int_a^b |f'(x)|dx=\int_a^b |\overset{+}{V}'(x)-\overset{-}{V}'(x)|dx$$

$$\leqslant\int_a^b \overset{+}{V}'(x)dx+\int_a^b \overset{-}{V}'(x)dx$$

$$=\overset{+}{V}(b)+\overset{-}{V}(b)=V(b).$$

这也就证明了(21)式,证完.

例 1 Cantor 函数$\Theta(x)$ 设C是$[0, 1]$上的 Cantor 集合. 我们把定义C时从$[0,1]$中去掉的那可数多个开区间加以分组. 第一组包含一个长度为$\frac{1}{3}$的区间$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$,第二组包含两个长度为$\frac{1}{3^2}$的区间$\left(\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2}\right),\left(\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2}\right)$,一般说来,第$n$组包含$2^{n-1}$个长度为$\frac{1}{3^n}$的区间.

$$\left(\frac{1}{3^n},\frac{2}{3^n}\right),\left(\frac{7}{3^n},\frac{8}{3^n}\right),\cdots,\left(\frac{3^n-2}{3^n},\frac{3^n-1}{3^n}\right).$$

在 $G_0\triangleq[0,1]-C$ 上如下定义一个函数:

$$\Theta(x)=\begin{cases}1/2, & x\in(1/3,2/3),\\ 1/4, & x\in(1/3^2,2/3^2),\\ 3/4, & x\in(7/3^2,8/3^2),\\ \cdots\end{cases}$$

这里$\Theta(x)$在第n组的2^{n-1}个区间上,依次取$\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n},\frac{5}{2^n},\cdots,\frac{2^n-1}{2^n}$.

然后用定义

$$\Theta(x)=\sup_{\substack{t<x\\ t\in G_0}}\Theta(t),\ \Theta(0)=0,\ \Theta(1)=1$$

的办法把 $\Theta(x)$ 的定义扩充到整个区间 $[0,1]$ 上. 易见 $\Theta(x)$ 是 $[0,1]$ 上的单调不减函数. 由于 $\left\{\frac{k}{2^n};k=1,2,\cdots,2^n-1,n=1,2\cdots\right\}$ 在 $[0,1]$ 上稠密, 所以 $\Theta(x)$ 还是 $[a,b]$ 上的连续函数. 在 G_0 上, $\Theta'(x)\equiv 0$, 而 $mC=0$, 所以

$$\Theta'(x)=0\ \text{a.e. 于}[0,1]$$

于是

$$\int_0^1\Theta'(x)dx=0<\Theta(1)-\Theta(0)=1.$$

这个 $\Theta(x)$ 称为 $[0,1]$ 上的 Cantor 函数.

如果令

$$\lambda(x)=\frac{1}{2}(\Theta(x)+x),$$

则 $\lambda(x)$ 更是在 $[0,1]$ 上严格递增的连续函数, 由于

$$\lambda'(x)=\frac{1}{2}\ \text{a.e. 于}[a,b],$$

所以同样有

$$\int_0^1\lambda'(x)dx=\frac{1}{2}<\lambda(1)-\lambda(0).$$

上述例子说明, 即使所考虑的函数是连续的, (9)和(21)中的不等号仍能成立. 所以函数的有界变差性虽然能保证它有可积的导函数, 但不能保证我们熟知的 Newton-Lebnitz 公式成立, 即不能保证(3)式成立.

例 2　函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{\pi}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

是处处有导数的，

$$f'(x)=\begin{cases}2x\cos\dfrac{\pi}{x^2}+2\pi\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{\pi}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

但是 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积.

事实上，只要 $0\notin[\alpha,\beta]$，$f'(x)$ 便在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，从而

$$\int_\alpha^\beta f'(x)dx=f(\beta)-f(\alpha)=\beta^2\cos\frac{\pi}{\beta^2}-\alpha^2\cos\frac{\pi}{\alpha^2}.$$

取 $\alpha_n=\sqrt{\dfrac{2}{4n+1}}$，$\beta_n=\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$，则

$$\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f'(x)dx=\frac{1}{2n},\ n=1,2,3,\cdots$$

注意：$I_n=[\alpha_n,\beta_n]$，$n=1,2,3,\cdots$，是互不相交的，所以

$$\int_0^1|f'(x)|dx\geqslant\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n}|f'(x)|dx\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_{I_n}f'(x)dx\right|$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=+\infty.$$

定义 5 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的函数，如果对于任意 $\varepsilon>0$，恒有 $\delta>0$，使于 $[a,b]$ 上的任意一组分点 $a_1<b_1\leqslant a_2<b_2\leqslant\cdots\leqslant a_n<b_n$，只要 $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$，便有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的**绝对连续函数**，或说 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上**绝对连续**.

显然 $[a,b]$ 上的绝对连续函数必在 $[a,b]$ 上一致连续.

现在我们来证明在 $[a,b]$ 上绝对连续的函数一定是 $[a,b]$ 上的

有界变差函数. 设δ_1是定义 5 中使$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta_1$时，$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<1$的正常数，$N=\left[\frac{b-a}{\delta_1}\right]+1$，此处$\left[\frac{b-a}{\delta_1}\right]$表$\frac{b-a}{\delta_1}$的整数部分. 用$a=y_0<y_1<\cdots<y_N=b$把$[a, b]$等分成$N$个长度小于$\delta_1$的小区间. 对于$[a,b]$的任意分划$\Delta$，把$y_1,\cdots,y_{N-1}$添加进去，得到新的分划

$$\tilde{\Delta}:\ a=z_0<z_1<\cdots<z_l=b,$$

则$f(x)$关于Δ的变差

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\Delta)\leqslant\mathrm{V}(\tilde{\Delta})&=\sum_{i=1}^{l}|f(z_i)-f(z_{i-1})|\\&=\sum_{j=1}^{N}\sum_{y_{j-1}\leqslant z_{i-1}<z_i\leqslant y_j}|f(z_i)-f(z_{i-1})|\\&\leqslant N.\end{aligned}$$

所以
$$\mathrm{V}_a^b(f)\leqslant N<+\infty.$$

定理 3 如果$f(x)$在$[a,b]$上绝对连续，则$f(x)$在$[a,b]$上几乎处处可微，$f'(x)$在$[a,b]$上可积，并且

$$\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a). \tag{22}$$

证明 因绝对连续函数都是有界变差函数，所以由定理 2 (2)，$f(x)$在$[a,b]$上几乎处处可微且$f'(x)$在$[a,b]$上可积. 对于$x>b$，令$f(x)=f(b)$. 定义

$$\lambda_n(x)=\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right],$$

则$\lambda_n(x)$是$[a,b]$上的可积函数，并且

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n(x)=f'(x) \text{ a.e. 于}[a,b]. \tag{23}$$

以下我们来证明 $\{\lambda_n(x)\}$ 是在$[a,b]$上积分等度绝对连续的函数序列.

设 $\varepsilon>0$ 已给定, $\delta>0$ 是定义 5 中所说的对应于 ε 的一常数. 如果 $I_i=(a_i,b_i)$, $i=1,2,3,\cdots$是包含于(a,b)内的互不相交的区间, $\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)<\delta$, 则对于任意 m, $\sum_{i=1}^{m}(b_i-a_i)<\delta$, 所以由 δ 的定义, 对任意 $x\in[a,b]$, 都有

$$\left|\sum_{i=1}^{m}f(x+b_i)-f(x+a_i)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{m}|f(x+b_i)-f(x+a_i)|<\varepsilon.$$

从而

$$\begin{aligned}\left|\int_{\bigcup_{i=1}^{m}I_i}\lambda_n(x)dx\right|&=\left|n\sum_{i=1}^{m}\int_{a_i}^{b_i}\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]dx\right|\\&=\left|n\sum_{i=1}^{m}\left[\int_{b_i}^{b_i+\frac{1}{n}}f(x)dx-\int_{a_i}^{a_i+\frac{1}{n}}f(x)dx\right]\right|\\&=n\left|\int_0^{\frac{1}{n}}\sum_{i=1}^{m}[f(b_i+x)-f(a_i+x)]dx\right|\\&\leqslant n\int_0^{\frac{1}{n}}\left|\sum_{i=1}^{m}[f(b_i+x)-f(a_i+x)]\right|dx\\&<\varepsilon,\qquad n=1,2,3,\cdots.\end{aligned}$$

进而由 §2 定理 4(4),

$$\left|\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i}\lambda_n(x)dx\right|\leqslant\varepsilon,\ \ n=1,2,3,\cdots$$

这样，对于任意开集 $G\subset[a,b]$，只要 $mG<\delta$ 便有

$$\left|\int_G \lambda_n(x)dx\right|\leqslant\varepsilon,\quad n=1,2,3,\cdots. \tag{24}$$

如果 $A\subset[a,b]$是一 G_δ 集：$A=\bigcap_{m=1}^{\infty}G_m$，$mA<\delta$，则可设诸开集 G_m 也有 $mG_m<\delta$ 且 $G_m\supset G_{m+1}$. 因此由(参考§2习题的第 13 题)

$$\lim_{m\to\infty}\int_{G_m}\lambda_n(x)dx=\int_A\lambda_n(x)dx$$

及(24)便知

$$\left|\int_A \lambda_n(x)dx\right|\leqslant\varepsilon,\quad n=1,2,3,\cdots$$

现设 $A\subset[a,b]$是任意的可测子集，$mA<\delta$，因第三章§3定理 3，有 G_δ 型集合 $G\supset A$，使 $mG=mA$，于是 $mG<\delta$，$m(G-A)=0$，所以

$$\left|\int_A \lambda_n(x)dx\right|=\left|\int_G \lambda_n(x)dx\right|\leqslant\varepsilon,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

这证明$\{\lambda_n(x)\}$确实是在$[a,b]$上积分等度绝对连续的序列. 由 Vitali 定理(§2，定理 6)及(23)式，

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)dx&=\lim_{n\to\infty}\int_a^b \lambda_n(x)dx\\&=\lim_{n\to\infty}n\int_a^b\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]dx\\&=\lim_{n\to\infty}n\left[\int_b^{b+\frac{1}{n}}f(x)dx-\int_a^{a+\frac{1}{n}}f(x)dx\right]\\&=f(b)-f(a).\end{aligned}$$

证完.

引理 4 设 $f(x)$是$[a,b]$上的可积函数，$\int_a^x f(t)dt\equiv0$，则$f(x)=0$ a.e. 于$[a,b]$.

证明 既然假设$\int_a^x f(t)dt\equiv0$，自然对于任何区间 I，恒有

$\int_I f(x)dx=0$，从而对于任意开集 $G\subset[a,b]$，均有 $\int_G f(x)dx=0$.

设 $F\subset[a,b]$ 是一闭集，令 $G=[a,b]-F$，则

$$\int_F f(x)dx=\int_a^b f(x)dx-\int_G f(x)dx=0.$$

假如引理不真，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不几乎处处为零，不妨设 $m\{x;x\in[a,b],f(x)>0\}>0$. 从而有 n，使 $m\left\{x:x\in[a,b],f(x)>\frac{1}{n}\right\}=d>0$. 显然我们可以取一闭集 F，使 $F\subset\left\{x:x\in[a,b],f(x)>\frac{1}{n}\right\}$，且 $mF\geqslant\frac{d}{2}$. 于是

$$0=\int_F f(x)dx\geqslant\frac{1}{n}mF\geqslant\frac{d}{2n}>0.$$

矛盾.

定理 4 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，又

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+C,\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

则 $F(x)$ 是在 $[a,b]$ 上绝对连续的函数，

$$F'(x)=f(x)\ \text{a.e. 于}[a,b].$$

证明 从 §2 定理 5 易见 $F(x)$ 是在 $[a,b]$ 上绝对连续的. 因此由定理 3 知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微，$F'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 并且对于任意 $x\in[a,b]$，都有

$$F(x)-F(a)=\int_a^x F'(t)dt.$$

而由定义 $F(x)-F(a)=\int_a^x f(t)dt$，所以

$$\int_a^x[F'(t)-f(t)]dt=0,\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

由引理 4 便得

$$F'(x)=f(x)\ \text{a.e. 于}[a,b].$$

证完.

定理 4 圆满地回答了问题 I，结合定理 3，我们看到绝对连续性是一个函数为一Lebesgue 可积函数的不定积分的特征性质. 同时也给予了问题 II 一个回答. 但是例 2 告诉我们，如果从微分与积分应为互逆的运算这一角度来观察，则问题并没有得到很好的解决. 例 2 中的函数处处有有限的导数，但导函数却不是可积的，这时要想从导函数反过来求原来的函数，Lebesgue 的积分理论并不解决问题 3，需要另外的积分理论，不过这已超出了本课程的范围. 此处不拟再讨论.

定理 5(分部积分法) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续，$\lambda(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)=\int_a^x \lambda(t)dt+C$，$C$ 为常数，则

$$\int_a^b f(x)\lambda(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)f'(x)dx. \tag{25}$$

证明 令 D 表区域：$a\leqslant y\leqslant x\leqslant b$. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续，所以 $f'(x)$ 是可积的，从而

$$F(x,y)=\lambda(x)f'(y)$$

是 D 上的可积函数. 由 Fubini 定理，

$$\int_a^b dx\int_a^x \lambda(x)f'(y)dy=\int_D f(z)dz=\int_a^b dy\int_y^b f'(x)dx,$$

但

$$\int_a^b dx\int_a^x \lambda(x)f'(y)dy=\int_a^b \lambda(x)[f(x)-f(a)]dx$$

$$=\int_a^b \lambda(x)f(x)dx-f(a)[g(b)-g(a)].$$

$$\int_a^b dy\int_y^b \lambda(x)f'(y)dx=\int_a^b f'(y)[g(b)-g(y)]dy$$

$$=-\int_a^b f'(y)g(y)dx+g(b)[f(b)-f(a)].$$

所以

$$\int_a^b f(x)\lambda(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

证完.

作为本节的结尾，我们再来证明一个经常用到的**变量替换公式**:

定理 6 如果$f(x)$,$g(x)$都是可积函数,$g(x)\geqslant 0$,$G(x)$是$g(x)$的一个不定积分,$a=G(\alpha)$,$b=G(\beta)$,则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(G(t))g(t)dt. \tag{26}$$

证明 首先注意如果 $F(x)$是绝对连续函数，则由定义易见$F(G(x))$仍是绝对连续的，因此如果取$f(x)$的一个不定积分作为$F(x)$,由定理 4 和定理 3 便有

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(G(\beta))-F(G(\alpha))$$

$$=\int_\alpha^\beta\Big[F\Big(G(t)\Big)\Big]'dt,$$

因此要证明(26)式，只要能证明

$$[F(G(t))]'=f(G(t))g(t)\ \text{a.e.} \tag{27}$$

即可.

先考虑$f(x)$有界，$|f(x)|\leqslant M$的情况. 对于使$G(t+h)\neq G(t)$的h,

$$\frac{F(G(t+h))-F(G(t))}{h}$$

$$=\frac{F(G(t+h))-F(G(t))}{G(t+h)-G(t)}\cdot\frac{G(t+h)-G(t)}{h}. \tag{28}$$

由定理 4,几乎对所有的t,都有

$$\lim_{h\to 0}\frac{G(t+h)-G(t)}{h}=g(t).$$

令 E_0 表示使上式不成立的 t 的集合，则 $mE_0=0$. 令

$$E_1=\{t;G'(t)=g(t)=0\},$$

则当 $t\in E_1$ 时，

$$\left|\frac{F(G(t+h))-F(G(t))}{h}\right|=\left|\frac{1}{h}\int_{G(t)}^{G(t+h)}f(x)dx\right|$$

$$\leqslant M\left|\frac{1}{h}[G(t+h)-G(t)]\right|\to 0\quad(h\to 0).$$

由于这时 $f(G(t))g(t)=0$，所以(27)式成立. 再设

$$E_2=\{t;G'(t)=g(t)>0,F'(G(t))=f(G(t))\},$$

$$E_3=\{t;G'(t)=g(t)>0,\text{但 } F'(G(t))=f(G(t))\text{不成立}\}.$$

由(28)式知在 E_2 上(27)式成立. 可见我们只要证明 $mE_3=0$，为此又只需证明对每一正整数 m，

$$E_{3,m}\triangleq\left\{t;\ t\in E_3,g(t)\geqslant\frac{1}{m}\right\}$$

都是测度为零的即可.

设 $\delta>0$ 是任意给定的，根据定理 4，

$$m\{x;x=G(t),\ t\in E_{3,m}\}=0.$$

所以我们可作一开集 $O\supset\{x;x=G(t),\ t\in E_{3,m}\}$ 使得 $mO<\delta$. 对于每一 $t\in E_{3,m}$，考虑区间 $i_{t,h}=[t,t+h]$，根据 $E_{3,m}$ 的定义及 $G(t)$ 的连续性，知当 $h>0$ 充分小时，

$$[G(t),G(t+h)]\subset O\text{ 且 }G(t+h)-G(t)\geqslant\frac{h}{m}.$$

显然所有这样的区间 $i_{t,h}$ 构成 $E_{3,m}$ 的一个 Vitali 覆盖. 从而①由引理 1，可以从中选出有限多个互不相交的区间：

$$i_1=[t_1,t_1+h_1],\cdots,i_n=[t_n,t_n+h_n]$$

使

① 显然不妨设 $E_{3,m}$ 有界，从而外测度有限.

$$m^*\left(E_{3,m}-\bigcup_{j=1}^{n} i_j\right)<\delta.$$

从而

$$m^*(E_{3,m})\leqslant\delta+\sum_{j=1}^{n}h_j$$

$$<\delta+m\sum_{j=1}^{n}[G(t_j+h_j)-G(t_j)]$$

$$\leqslant\delta+m\cdot mO<(1+m)\delta.$$

注意 $\delta>0$ 是任意的，所以 $mE_{3,m}=0$. 这说明当 $|f(x)|\leqslant M$ 时，(27)式确实是成立的，从而这时公式(26)成立.

对于一般的 $f(x)$，显然可设 $f(x)\geqslant 0$. 令 $\{f(x)\}_n=\min\{f(x),n\}$，则对一切 n 都有

$$\int_a^b\{f(x)\}_n dx=\int_\alpha^\beta\{f(G(t))\}_n g(t)dt.$$

令 $n\to+\infty$，由Levi定理(§1定理5)便知这时(26)式仍成立. 证完.

习　　题

1. 证明：如果 $f(x),g(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，则 $f(x)+g(x)$，$f(x)g(x)$ 也都是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

2. 证明：当 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处存在且有界时，$f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上绝对连续的.

3. 在 $\mathbb{R}^1$ 中的可测集合 E 及定点 x_0，称 $\lim\limits_{\delta\to 0^+} m(E\cap(x_0-\delta,x_0+\delta))/2\delta$ 为 E 在 x_0 处的密度，记为 $d_E(x_0)$. 证明 $d_E(x)=1$ a.e. 于 E 和 $d_E(x)=0$ a.e. 于 E^c.

4. 证明：当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续时，$\int_a^b|f'(x)|dx=V_a^b(f)$.

5. 证明不可能有 $\mathbb{R}^1$ 中的可测集 E，使对一切 $x\in[0,1]$ 都有

$$m([0,x]\cap E)=\frac{1}{2}x.$$

6. 设 $y(t)$ 是$[a,b]$上的可测函数，

$$\sup_{[a,b]}\text{ess}|y(t)| \triangleq \inf\{\sup_{t\in[a,b]-E}|y(t)|; E\subset[a,b], mE=0\}$$
$$<+\infty.$$
$$Y(x)=\int_a^x y(t)dt, a\leqslant x\leqslant b.$$

证明：

$$\sup_{x',x''\in[a,b]}\left|\frac{Y(x')-Y(x'')}{x'-x''}\right|=\sup_{[a,b]}\text{ess}|y(t)|.$$

7. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，并且

$$\int_a^b x^n f(x)dx=0, n=0,1,2,3,\cdots$$
$$F(x)=\int_a^x f(t)dt, a\leqslant x\leqslant b$$

证明：对于任意多项式 $P(x)$ 都有

$$\int_a^b F(x)P(x)dx=0.$$

进而证明 $f(x)=0$ a.e. 于$[a,b]$

8. 证明

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在$[-1,1]$上处处可微，但 $F(x)$ 不在$[-1,1]$上绝对连续.

9. 证明：如果 $f(x)$ 在$[a, b]$上绝对连续，$E\subset[a,b]$，$mE=0, f(E)\triangleq\{f(x); x\in E\}$，则 $mf(E)=0$.

10. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，$g(x)$ 在$[a,b]$上可积，且 $g(x)\geqslant 0$. 证明：必有 $\xi\in[a,b]$ 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

11. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，$g(x)$ 在$[a, b]$上单调且绝对连续. 证明：必有 $\xi\in[a, b]$ 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

进而证明上述事实或对任何在 $[a,b]$上单调的有限函数都成立.（积分第二中值定理.）

*§5 一般测度空间上的Lebesgue积分

设S是一非空集合,$\mathscr{A}$是S的子集的一个σ-域,则$(S,\mathscr{A})$就称为一可测空间,$\mathscr{A}$中的元素称为这个可测空间中的可测集合. 回想到我们在第四章中定义简单函数和函数的可测性时,只用到了集合的可测性而并没用到测度. 所以我们可以把这些概念移植到一般的可测空间上来. 即对于定义在S上的实函数$f(x)$,当存在S的有限多个互不相交的可测子集$E_1,\cdots,E_m$及实数$c_1,c_2,\cdots,c_m$使$S=\bigcup_{i=1}^{m}E_i$且在每一个E_i上,$f(x)$都恒等于常数c_i时,称$f(x)$为S上的简单函数. 而如果对于任意$a\in\mathbf{R}$,$\{x;f(x)>a\}$都可测时,称$f(x)$为S上的可测函数,或说$f(x)$在S上可测.(严格说来,应说$f(x)$是$(S,\mathscr{A})$上的可测函数或$f(x)$在$(S,\mathscr{A})$上可测.)除了与连续性和下方图形有关的结论,如凡连续函数皆可测、非负函数可测的充要条件是下方图形可测及Lusin定理等结论以外,第四章中有关可测函数的结论现在仍然都是成立的. 当然由于在一般的可测空间中,只有集合的可测性而没有可测集合的测度,自然也就没有几乎处处成立之说,所以在第四章中出现“几乎处处”的地方,都应改为处处成立.

函数的积分和函数的可测性不一样. 定义积分时是不仅要用到集合的可测性,而且要用到集合的测度的. 如果在一可测空间$(S,\mathscr{A})$上还给定了一个定义于$\mathscr{A}$上的测度α,则我们就称给定了一测度空间$(S,\mathscr{A},\alpha)$.

设$(S,\mathscr{A},\alpha)$是一给定的测度空间,如果$\alpha(S)<+\infty$(从而对任意$A\in\mathscr{A}$都有$\alpha(A)<+\infty$),则说这个测度空间是有限的;如果

$\alpha(S)=+\infty$，但 $S=\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i, S_i\in\mathscr{A}, \alpha(S_i)<\infty, i=1,2,3,\cdots$. 则说这个测度空间是 σ-有限的. 比如当 $g(x)$ 是 R^1 上的有界单调递增右连续函数，α_g 是由 $g(x)$ 产生的 $\mathbf{R}^1$ 上的 Lebesgue-Stieltjes 测度时，$(\mathbf{R}^1, \mathfrak{M}_g, \alpha_g)$ 是一有限的测度空间，而如果 m 是 $\mathbf{R}^n$ 上的普通的 Lebesgue 测度，则 $(\mathbf{R}^n, \mathfrak{M}, m)$ 不是有限的而只是 σ-有限的测度空间.

现在我们要讨论定义于抽象测度空间上的函数的积分. 为简便计，我们假定所给定的测度空间 $(S, \mathscr{A}, \alpha)$ 是有限的，其实所得到的结论，绝大部分都是可以容易地推广到 σ-有限的测度空间上去的. 另外，我们还假定所给的测度空间是完备的，即当 $A\in\mathscr{A}$，$\alpha(A)=0$ 时，A 的一切子集也都属于 $\mathscr{A}$.

在测度空间 $(S, \mathscr{A}, \alpha)$ 中，我们仍可以和以前在 $(\mathbf{R}^n, \mathfrak{M}, m)$ 中一样，定义：命题 $P(x)$ 在 S 上 α-几乎处处成立（记为 $P(x)$ a. e. (α)），如果存在 $N\in\mathscr{A}, \alpha(N)=0$，使对 $x\in S-N$，$P(x)$ 恒成立.

对于定义在 $(S, \mathscr{A}, \alpha)$ 上的函数 $f(x)$，现在我们可以把 §1 和 §2 中的讨论原封不动地搬过来而得到积分 $\int_S f(x)d\alpha$（由于现在的测度是 α，我们把积分记号中的 dx 改成了 $d\alpha$）和可积函数的概念. 这时 §1 中的各定理，除有关下方图形的定理 3 外都依然成立.（由于现在还假定了 $\alpha(S)<+\infty$，所以证明还会更简单些.）至于 §2 中的各定理，讨论 Riemann 积分和 Lebesgue 积分关系的定理 1 现在当然不会有了，其他从结论到证明都不需要作实质性的改变即可移植过来.

在一般的测度空间上的积分理论中，相当于 §4 定理 3 的是所谓 Radon-Nikodym 定理，现在我们就来介绍这个重要结果，为此我们要先介绍一个类似于有界变差函数的 Jordan 分解（§4(18) 式）的结果，即所谓完全可加集合函数的 Jordan-Hahn 分解.

定理 1(Jordan-Hahn **分解**) 设 μ 是定义于 $\mathscr{A}$ 上的完全可加集合函数, $\mu(\varnothing)=0$, $\mu(A)>-\infty(A\in\mathscr{A})$, 则有 $D\in\mathscr{A}$, 使当 $A\in\mathscr{A}$, ,$A\subset D$ 时, $\mu(A)\geqslant 0$; 而当 $A\in\mathscr{A}$, $A\subset D^c=S-D$ 时, $\mu(A)\leqslant 0$. 于是

$$\mu^+(A)=\mu(A\cap D)\quad(A\in\mathscr{A}),$$

$$\mu^-(A)=-\mu(A\cap D^c)\quad(A\in\mathscr{A}),$$

都是 $\mathscr{A}$ 上的测度①,

$$\mu(A)=\mu^+(A)-\mu^-(A)\quad(A\in\mathscr{A})$$

并且对任意 $A\in\mathscr{A}$ 还有

$$\mu^+(A)=\sup\{\mu(B);B\in\mathscr{A},B\subset A\},$$

$$\mu^-(A)=\sup\{-\mu(B);B\in\mathscr{A},B\subset A\},$$

证明 我们主要是要证明这样的集合 D 必定存在. 只要证明了这点, 其余就都是很显然的事情了.

对 $A\in\mathscr{A}$, 我们定义:

$$\mu^+(A)=\sup\{\mu(B);B\in\mathscr{A},B\subset A\},$$

得到一个在 $\mathscr{A}$ 上定义的集合函数. 因为 $\mu(\varnothing)=0$, 所以 $\mu^+(A)\geqslant 0$. 令

$$\mathscr{B}=\{B;B\in\mathscr{A},\mu^+(B)=0\}.$$

$$\beta=\inf\{\mu(B);\ B\in\mathscr{B}\}.$$

选 $B_n\in\mathscr{B}$, 使 $\mu(B_n)\to\beta(n\to\infty)$. 从 μ 的完全可加性, 对于任意 $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$, $A\in\mathscr{A}$, 都有

$$\mu(A)=\mu\left(A\cap\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n-\bigcup_{k=1}^{n-1}B_k)\right]\right)$$

① 由于 $\mu(A)>-\infty$, $A\in\mathscr{A}$. 所以 $\mu^-(A)<+\infty$ 对任意 $A\in\mathscr{A}$ 都成立, 即 μ^- 还是有限测度.

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(A\cap\left(B_n-\bigcup_{k=1}^{n-1}B_k\right)\right)$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu^+(B_n)=0.$$

所以 $\mu^+\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=0$. 即 $B\triangleq\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\in\mathscr{B}$. 于是

$$\beta\leqslant\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n-B_i\right)+\mu(B_i)$$

$$\leqslant\mu^+(B)+\mu(B_i)=\mu(B_i)$$

$$\to\beta\quad(i\to\infty).$$

这说明 $\mu(B)=\beta$. 从而 $\beta>-\infty$. 令

$$D=B^c=S-B,$$

则 $D\in\mathscr{A}$, $D^c=B\in\mathscr{B}$, $\mu(D^c)=\mu(B)=\beta$. 以下我们来证明这个 D 即合乎要求.

首先当 $A\in\mathscr{A}$, $A\subset D^c$ 时, $\mu(A)\leqslant0$ 是显然的, 因为我们已有

$$\mu^+(B)=\mu^+(D^c)=\sup\{\mu(A);A\in\mathscr{A},A\subset D^c\}=0.$$

尚待证明的是当 $A\in\mathscr{A}$, $A\subset D$ 时 $\mu(A)\geqslant0$. 用反证法,设有 $A_0\in\mathscr{A}$, $A_0\subset D$, 使 $\mu(A_0)<0$. 如果 $\mu^+(A_0)=0$, 则

$$\mu^+(A_0\cup B)=\sup\{\mu(C);C\in\mathscr{A},C\subset A_0\cup B\}$$

$$\leqslant\sup\{\mu(C_1);C_1\in\mathscr{A},C_1\subset A_0\}+\sup\{\mu(C_2);C_2\in\mathscr{A},C_2\subset B\}$$

$$=\mu^+(A_0)+\mu^+(B)=0,$$

于是 $A_0\cup B\in\mathscr{B}$. 但是由于 $A_0\cap B=\varnothing$,

$$\mu(A_0\cup B)=\mu(A_0)+\mu(B)<\mu(B)=\beta.$$

这与 β 的定义相冲突. 可见只可能有 $\mu^+(A_0)>0$. 这时便有正整数 k, 使存在 $A\in\mathscr{A}$, $A\subset A_0$ 满足 $\mu(A)\geqslant\frac{1}{k}$. 用 k_1 表示这样的正整

数中之最小者，又 $E_1\in\mathscr{A}$，$E_1\subset A_0$使 $\mu(E_1)\geqslant\frac{1}{k_1}$，则

$$A_1\triangleq A_0-E_1\in\mathscr{A}.$$

$$\mu(A_1)=\mu(A_0)-\mu(E_1)\leqslant\mu(A_0)-\frac{1}{k_1}<0.$$

对于 A_1 重复以上的讨论，又可选出一个最小的正整数 k_2 及 $E_2\in\mathscr{A}$，$E_2\subset A_1$ 使$\mu(E_2)\geqslant\frac{1}{k_2}$. 于是对于 $A_2=A_1-E_2$ 又有

$$\mu(A_2)=\mu(A_1)-\mu(E_2)<0.$$

这个过程可以一直进行下去，而得到一串包含于 A_0 内的、属于$\mathscr{A}$的互不相交的集合 E_n，$n=1,2,3,\cdots$，$\mu(E_n)\geqslant\frac{1}{k_n}$. 从 $\mu(A_0)<0$ 还可知

$$0<\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)<+\infty.$$

因若不然便有

$$\mu(A_0)=\mu\left(A_0-\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)+\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=+\infty.$$

与 $\mu(A_0)<0$ 相矛盾. 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)<+\infty.$$

这说明必有 $k_n\to\infty$（当 $n\to\infty$）. 令

$$E=A_0-\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,$$

则当 $A\in\mathscr{A}$，$A\subset E$ 时必有 $\mu(A)\leqslant 0$. 这是因为如果 $\mu(A)>0$，则有正整数 k 使 $\mu(A)>\frac{1}{k}$. 从定义 k_n 时所要求的最小性，知 $k\geqslant k_n$ 对一切 n 都成立，这是与 $k_n\to\infty$ 相矛盾的. 这样我们作出

的 E 是使 $\mu^+(E)=0$ 的.

若 $A\in\mathscr{A}$, $A\subset B\cup E$, 则因 $B\cap E=\varnothing$,

$$\mu(A)=\mu(A\cap B)+\mu(A\cap E)$$
$$\leqslant\mu^+(B)+\mu^+(E)=0.$$

可见 $B\cup E\in\mathscr{B}$. 可是从(1)式知

$$\mu(E)=\mu(A_0-\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)$$

$$=\mu(A_0)-\bigcup_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$$

$$<\mu(A_0)<0.$$

于是 $\mu(B\cup E)=\mu(B)+\mu(E)<\mu(B)=\beta$, 这也与 β 的定义相冲突、这样我们证明了对于 $A\in\mathscr{A}$, $A\subset D$, 必有 $\mu(A)\geqslant 0$. 定理证完.

从测度论的角度来看, 定理 1 中这样的分解 μ 为 μ^+ 和 μ^- 的办法是唯一的. 这就是说如果另一集合 $D_1\in\mathscr{A}$, 也有

$$\mu(A)\geqslant 0 \quad 当\ A\in\mathscr{A}, A\subset D_1,$$
$$\mu(A)\leqslant 0 \quad 当\ A\in\mathscr{A}, A\subset D_1^c.$$

则必对任意 $A\in\mathscr{A}$ 都有

$$\mu(A\cap D)=\mu(A\cap D_1),\quad \mu(A\cap D^c)=\mu(A\cap D_1{}^c). \qquad (1)$$

这是因为

$$A\cap(D-D_1)\subset D,\qquad A\cap(D-D_1)\subset D_1^c$$

两式同时成立, 所以

$$\mu(A\cap(D-D_1))\geqslant 0, \mu(A\cap(D-D_1))\leqslant 0$$

同时成立, 因而 $\mu(A\cap(D-D_1))=0$. 同理

$$\mu(A\cap(D_1-D))=0.$$

于是

$$\mu(A\cap D)=\mu(A\cap(D-D_1))+\mu(A\cap D\cap D_1)$$

$$=\mu(A\cap D\cap D_1)$$
$$=\mu(A\cap D\cap D_1)+\mu(A\cap(D_1-D))=\mu(A\cap D_1).$$

同理可证 (1) 式的第二式成立.

满足条件 $\mu(\varnothing)=0$, $\mu(A)>-\infty(A\in\mathscr{A})$的定义于$\mathscr{A}$上的完全可加集合函数称为$\mathscr{A}$上的**符号测度**. 这时$|\mu|=\mu^++\mu^-$也是定义于$\mathscr{A}$上的一个测度,称为$\mu$的**全变差**.

定义 1 设$(S,\mathscr{A},\alpha)$是一测度空间, μ是定义于$\mathscr{A}$上的符号测度,如果当$A\in\mathscr{A},\alpha(A)=0$时,恒有$\mu(A)=0$, 则说$\mu$是关于$\alpha$绝对连续的. 记为$\mu\ll\alpha$.

当$\mu\ll\alpha$时,对任意$A\in\mathscr{A},\alpha(A)=0$,由于

$$\alpha(A\cap D)=\alpha(A\cap D^c)=0,$$

所以

$$\mu(A\cap D)=\mu(A\cap D^c)=0,$$

从而

$$|\mu|(A)=\mu^+(A)+\mu^-(A)$$
$$=\mu(A\cap D)-\mu(A\cap D^c)=0.$$

即$|\mu|\ll\alpha$. 由于对任意$A\in\mathscr{A}$都有

$$|\mu(A)|\leqslant|\mu|(A).$$

所以$\mu\ll\alpha$的充要条件是$|\mu|\ll\alpha$. 其实我们还可以证明: 如果$|\mu|(S)<+\infty$, 则$\mu\ll\alpha$的充要条件是对任意$\varepsilon>0$, 都有$\delta>0$, 使$A\in\mathscr{A}$, $\alpha(A)<\delta$时, $|\mu|(A)<\varepsilon$. 这条件的充分性是显然的. 要说明必要性,设对某$\varepsilon_0>0$,没有合乎要求的δ,则对每一正整数n,都有$A_n\in\mathscr{A}$,使$\alpha(A_n)<\frac{1}{2^n}$, $|\mu|(A_n)\geqslant\varepsilon_0$. 令

$$E_0=\lim_n\sup A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,$$

则$E_0\in\mathscr{A}$,并且从

$$\alpha(E_0)\leqslant\alpha\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\alpha(A_k)<\frac{1}{2^{n-1}}\to 0,$$

知 $\alpha(E_0)=0$. 但是由于

$$|\mu|\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)\geqslant|\mu|(A_n)\geqslant\varepsilon_0$$

所以 $\quad |\mu|(E_0)=\lim_{n\to\infty}|\mu|\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)\geqslant\varepsilon_0$与$|\mu|\ll\alpha$矛盾.

定理 2 (Radon-Nikodyn 定理) 如果μ是$\mathscr{A}$上的符号测度,则有可测函数 $f(x)$使

$$\mu(A)=\int_A f(x)d\alpha \quad (A\in\mathscr{A}) \tag{2}$$

的充要条件是 $\mu\ll\alpha$. 这时 $\mu(S)<+\infty$ 的充要条件是 $f(x)$关于 α 可积; μ为非负的充要条件是 $f(x)\geqslant 0$ α-a. e.. 又当$\bar{\mu}(S)<+\infty$ 时, 这个 $f(x)$在 α-几乎处处相等的意义下是唯一的. 这时$f(x)$通常称为μ关于α的 **Radon-Nikodym 导数**, 记为 $\frac{d\mu}{d\alpha}$.

证明 关于定理的第一部分,只需证明充分性. 即证明当 $\mu\ll\alpha$时, 存在满足(2)的可测函数 $f(x)$. 由于 $\mu\ll\alpha$时, $\mu^+\ll\alpha$, $\mu^-\ll\alpha$, 所以我们还不妨假设μ是非负的①, 即设 $\mu(A)\geqslant 0$ $(A\in\mathscr{A})$.

先考虑 $\mu(S)<+\infty$ 的情形。注意如果f是一个使(2)成立的可测函数, $g(x)$是一个使对一切 $A\in\mathscr{A}$ 都有

$$\int_A g(x)d\alpha\leqslant\mu(A) \tag{3}$$

的非负可测函数,则对任意 $A\in\mathscr{A}$,都有

$$\int_A[f(x)-g(x)]d\alpha=\mu(A)-\int_A g(x)d\alpha\geqslant 0.$$

---

① 而且 $\mu(S)<+\infty$ 的充要条件是 $\mu^+(S)<+\infty$.

因此

$$f(x)\geqslant g(x),\qquad \alpha\text{-a. e.}.$$

这告诉我们应该如何去找 $f(x)$，即 $f(x)$ 如存在，应该是满足(3)式的非负可测函数的"上确界"．不过一般说来满足(3) 式的非负可测函数是很多的，它们的上确界很可能是不可测的，而且由于在所有使 $\alpha(\{x\})=0$ 的点处，这个上确界都必定是 $+\infty$，所以不大可能就是满足(2) 式的函数．因此这个"上确界"不能是逐点取的上确界．

令$\mathscr{L}$表示所有对一切 $A\in\mathscr{A}$ 都有 (3) 式的非负可测函数的集合，显然恒等于零的函数属于$\mathscr{L}$，所以$\mathscr{L}$非空．我们来证明

1° 若 $g_1,g_2\in\mathscr{L}$，则 $\hat{g}(x)=\max\{g_1(x),g_2(x)\}\in\mathscr{L}$，

2° 若 $g_n\in\mathscr{L},g_n(x)\leqslant g_{n+1}(x),n\geqslant 1$，则 $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)\in\mathscr{L}$.

设 $A\in\mathscr{A}$．令

$$A_1=A\cap\{x;g_1(x)\geqslant g_2(x)\},$$
$$A_2=A\cap\{x;g_1(x)<g_2(x)\},$$

则 $A_1,A_2\in\mathscr{A},A=A_1\cup A_2,A_1\cap A_2=\varnothing$．所以

$$\begin{aligned}\int_A\hat{g}(x)d\alpha&=\int_{A_1}\hat{g}(x)d\alpha+\int_{A_2}\hat{g}(x)d\alpha\\&\leqslant\int_{A_1}g_1(x)d\alpha+\int_{A_2}g_2(x)d\alpha\\&\leqslant\mu(A_1)+\mu(A_2)=\mu(A).\end{aligned}$$

这证明了 1°．至于 2°，由于 $\int_A g_n(x)d\alpha\leqslant\mu(A)$ 对一切 $n\geqslant 1$ 都成立，而由 Levi 定理，

$$\int_A g(x)d\alpha=\lim_{n\to\infty}\int_A g_n(x)d\alpha.$$

所以自然也有 $\int_A g(x)d\alpha\leqslant\mu(A)$．即也有$g\in\mathscr{L}$.

现在令

$$\sigma=\sup\left\{\int_S g(x)d\alpha;\ g\in\mathscr{L}\right\}$$

由于 $\sigma\leqslant\mu(S)<+\infty$，由上确界定义，存在一串 $g_n\in\mathscr{L}$，使

$$\sigma-\frac{1}{n}<\int_S g(x)d_n\alpha\leqslant\sigma,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

令

$$g_n{}^*(x)=\max\{g_1(x),\cdots,g_n(x)\},\quad n=1,2,3,\cdots.$$

则 $g_n{}^*\in\mathscr{L}$. 且 $g_n^*(x)\leqslant g_{n+1}^*(x), n=1,2,3,\cdots$. 定义

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}g_n^*(x).$$

我们往证明这个$f(x)$就是使(2)式成立的"上确界"函数.

显然 $f(x)$是非负可测的. 由 2°，$f\in\mathscr{L}$ 并且由 Levi 定理，

$$\begin{aligned}\int_S f(x)d\alpha&=\lim_{n\to\infty}\int_S g_n^*(x)d\alpha\\&\geqslant\lim_{n\to\infty}\int_S g_n(x)d\alpha\\&\geqslant\lim_{n\to\infty}\left(\sigma-\frac{1}{n}\right)=\sigma.\end{aligned}$$

所以$\int_S f(x)d\alpha=\sigma$.

令

$$\nu(A)=\mu(A)-\int_A f(x)d\alpha\quad(A\in\mathscr{A}).$$

由于 $f\in\mathscr{L}$，ν 是$\mathscr{A}$上的一非负测度.

从而

$$\nu_n=\nu-\frac{\alpha}{n}$$

是$\mathscr{A}$上的符号测度(因 $\alpha(S)<+\infty$，所以 $\nu_n(A)>-\infty$). 对 ν_n 应用定理 1，得到 $D_n\in\mathscr{A}$，使

$$\nu_n{}^+(A)=\nu_n(A\cap D_n),\quad \nu_n{}^-(A)=-\nu_n(A\cap D_n^c)$$

$$(A\in\mathscr{A},\quad n=1,2,3,\cdots)$$

这也就是说对任意 $A\in\mathscr{A}$,

$$\nu(A\cap D_n)\geqslant\frac{1}{n}\alpha(A\cap D_n),\quad \nu(A\cap D_n^c)\leqslant\frac{1}{n}\alpha(A\cap D_n^c).$$

于是若用$\varphi_{D_n}(x)$表 D_n 的示性函数,则

$$\int_A\{f(x)+\frac{1}{n}\varphi_{D_n}(x)\}d\alpha=\int_A f(x)dx+\int_{A\cap D_n}\frac{1}{n}d\alpha$$

$$=\int_A f(x)d\alpha+\frac{1}{n}\alpha(A\cap D_n)$$

$$\leqslant\int_A f(x)d\alpha+\nu(A\cap D_n)$$

$$\leqslant\int_A f(x)d\alpha+\nu(A)=\mu(A),$$

这说明 $f+\frac{1}{n}\varphi_{D_n}\in\mathscr{L}$. 从而应有

$$\sigma=\int_S f(x)d\alpha\leqslant\int_S[f(x)+\frac{1}{n}\varphi_{D_n}(x)]d\alpha\leqslant\sigma,$$

于是 $$\int_S\frac{1}{n}\varphi_{D_n}(x)\,d\alpha=\frac{1}{n}\int_S\varphi_{D_n}(x)d\alpha=0,$$

进而

$$\alpha(D_n)=0,n=1,2,\cdots$$

令 $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n$, 则 $B\in\mathscr{A},\alpha(B)=0$. 所以应有 $\mu(B)=0$. 又从

$\alpha(B)=0$ 知 $\int_B f(x)d\alpha=0$, 所以

$$\nu(B)=\mu(B)-\int_B f(x)d\alpha=0.$$

注意 ν 是一测度,所以对任意 $A\in\mathscr{A}$, $A\subset B$, 都有 $\nu(A)=0$, 从而

$$\nu(A\cap B)=0,\quad (A\in\mathscr{A})$$

另一方面,对任意 n, 都有

$$\nu(B^c)\leqslant\nu(D_n^c)\leqslant\frac{1}{n}\alpha(D_n^c)$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\alpha(S)<+\infty.$$

所以 $\nu(B^c)=0$. 总之，对于任意 $A\in\mathscr{A}$,

$$0\leqslant\nu(A)=\nu(A\cap B)+\nu(A\cap B^c)$$
$$\leqslant\nu(A\cap B)+\nu(B^c)=0.$$

这说明

$$\mu(A)=\int_A f(x)d\alpha.$$

即(2) 式成立. 另外，由于现在 $\mu(S)<+\infty$, 所以 $f(x)$ 还是关于 α 可积的.

再看 $\mu(S)=+\infty$ 的情形. 令

$$\mathscr{B}=\{B;B\in\mathscr{A},\mu(B)<+\infty\}.$$

取 $B_n\in\mathscr{B}$, 使

$$\lim_{n\to\infty}\alpha(B_n)=\sup\{\alpha(B);B\in\mathscr{B}\}\leqslant\alpha(S)<+\infty.$$

令 $$B_n^*=\bigcup_{i=1}^n B_i, \text{则 } B_n^*\in\mathscr{B}, B_n^*\subset B_{n+1}^*, n\geqslant 1.$$

因此

$$\alpha\left(\bigcup_{n=1}^\infty B_n^*\right)=\lim_{n\to\infty}\alpha(B_n^*)=\sup\{\alpha(B);\ B\in\mathscr{B}\}.$$

令

$$\mu_n(A)=\mu(A\cap(B_n^*-B_{n-1}^*))\quad(A\in\mathscr{A}, B_0^*=\varnothing),$$

则 μ_n 是 $\mathscr{A}$ 上的测度，$\mu_n(S)<+\infty$, $\mu_n\ll\alpha$. 所以由前段证明，有非负可测函数 $f_n(x)$, 使

$$\mu_n(A)=\int_A f_n(x)d\alpha,\qquad A\in\mathscr{A}.$$

$$n=1,2,3,\cdots.$$

对于$(B_n^*-B_{n-1}^*)^c$的任何可测子集E, $\mu_n(E)=0$,所以

$$f_n(x)=0,\quad \alpha\text{-a.e.}\ 于(B_n^*-B_{n-1}^*)^c.$$

定义

$$f(x)=\begin{cases} f_n(x), & 当\ x\in B_n^*-B_{n-1}^*, n=1,2,\cdots \\ +\infty, & 在别处, \end{cases}$$

则$f(x)$是非负可测函数. 往下证明这时(2)式成立.

设$A\in\mathscr{A}$,如果$\alpha\left(A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n^*\right)^c\right)=0$, 则有

$$\mu\left(A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n^*\right)^c\right)=0.$$

因此

$$\begin{aligned}\mu(A)&=\mu\left(A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n^*\right)\right)\\ &=\mu\left(A\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n^*-B_{n-1}^*)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A\cap(B_n^*-B_{n-1}^*))\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_A f_n(x)d\alpha\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A\cap(B_n^*-B_{n-1}^*)}f_n(x)d\alpha\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A\cap(B_n^*-B_{n-1}^*)}f(x)d\alpha=\int_A f(x)d\alpha.\end{aligned}$$

如果

$$\alpha\left(A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n^*\right)^c\right)=d>0,$$

则这时必有 $\mu(A)=+\infty$. 因为如果 $\mu(A)<+\infty$, 则对任意 m 都有

$$C_m \triangleq A\cup\left(\bigcup_{n=1}^{m} B_n^*\right)\in\mathscr{B}.$$

而

$$\alpha(C_m)\geqslant\alpha\left(A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^*\right)^c\right)+\alpha\left(\bigcup_{n=1}^{m} B_n^*\right)$$

$$=d+\alpha\left(\bigcup_{n=1}^{m} B_n^*\right).$$

注意 $m\to\infty$ 时,

$$\alpha\left(\bigcup_{n=1}^{m} B_n^*\right)\to\alpha\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^*\right)=\sup\{\alpha(B);B\in\mathscr{B}\}$$

便会得到

$$\sup\{\alpha(B);\ B\in\mathscr{B}\}\geqslant\sup_{m\geqslant 1}\{\alpha(C_m)\}$$

$$\geqslant d+\sup\{\alpha(B);B\in\mathscr{B}\}.$$

产生矛盾. 另一方面在 $A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^*\right)^c$ 上 $f(x)=+\infty$, 所以

$$\int_A f(x)d\alpha\geqslant\int_{A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n^*\right)^c} f(x)d\alpha=+\infty.$$

可见这时仍有 $\mu(A)=\int_A f(x)d\alpha$. 总之 $f(x)$确实使(2) 式成立.

最后证明所述 $f(x)$ 的唯一性. 设另有一个 h 也满足(2) 式. 因为 $\mu(S)<+\infty$, $f(x)$关于 α 可积, 因而是 α-几乎处处有限的. 考虑 α-几乎处处有定义的函数 $g(x)=f(x)-h(x)$, 对任意 $A\in\mathscr{A}$,

$$\int_A g(x)d\alpha=\int_A f(x)d\alpha-\int_A h(x)d\alpha=0.$$

因此 $g(x)=0$ α-a. e.. 即 $f(x)=h(x)$ α-a. e.. 证完.

以下我们讨论有关乘积测度和 Fubini 定理的问题.

设 $(S,\mathscr{A})$，$(T,\mathscr{B})$ 是两个可测空间，对于 $E\subset S\times T$，$x\in S$，$y\in T$，还是分别称

$$E_x\triangleq\{y;(x,y)\in E\}\text{和}E^y\triangleq\{x;(x,y)\in E\}$$

为 E 在 x 处和在 y 处的**截口**. 又称 $A\in\mathscr{A}$，$B\in\mathscr{B}$ 的乘积 $A\times B$ 为 $S\times T$ 中的**可测矩形**，由 $S\times T$ 中全体可测矩形所产生的，$S\times T$ 的子集的 σ-域，称为**乘积 σ-域**，记为 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$. 这时 $(S\times T,\mathscr{A}\times\mathscr{B})$ 也是一可测空间，称为可测空间 $(S,\mathscr{A})$，$(T,\mathscr{B})$ 的**乘积空间**.

引理 1 如果 E 是乘积空间 $(S\times T,\mathscr{A}\times\mathscr{B})$ 中的可测集，即 $E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$，则对于任意 $x\in S$，$E_x\in\mathscr{B}$，对任意 $y\in T$，$E^y\in\mathscr{A}$.

又如果 $f(x,y)$ 是 $(S\times T,\mathscr{A}\times\mathscr{B})$ 上的可测函数，则对一切 $x\in S$，$f(x,y)$ 都是 y 的 $(T,\mathscr{B})$ 上的可测函数，对一切 $y\in T$，$f(x,y)$ 都是 x 的 $(S,\mathscr{A})$ 上的可测函数.

证明 如果 $E=A\times B$ 是 $S\times T$ 的可测矩形，则

$$E_x=\begin{cases}B, & \text{当 } x\in A,\\ \varnothing, & \text{当 } x\overline{\in}A,\end{cases}\qquad E^y=\begin{cases}A, & \text{当 } y\in B,\\ \varnothing, & \text{当 } y\overline{\in}B,\end{cases}$$

所以定理的第一个结论对所有可测矩形都成立. 用 $\mathscr{F}$ 记 $S\times T$ 中使定理的第一个结论成立的子集的集合. 由于对任意 $E_\lambda\subset S\times T$，$\lambda\in\Lambda$，都有

$$(E_\lambda^c)_x=(E_\lambda)_x^c,\ (E_\lambda^c)^y=[(E_\lambda)^y]^c,$$

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda\right)_x=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(E_\lambda)_x,\ \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda\right)^y=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(E_\lambda)^y,$$

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda\right)_x=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(E_\lambda)_x,\ \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda\right)^y=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(E_\lambda)^y,$$

$$(x\in S,y\in T).$$

易见 $\mathscr{F}$ 是一 σ-域. 从而 $\mathscr{F}\supset\mathscr{A}\times\mathscr{B}$. 这证明了定理的第一个结

论. 至于第二个结论，只要注意到$f(x,y)$可测的充要条件是对任意实数a,

$$\{(x,y);f(x,y)>a\}$$

都属于$\mathscr{A}\times\mathscr{B}$即从第一结论推出.

现在假设$(S,\mathscr{A},\mu)$和$(T,\mathscr{B},\nu)$是两个有限的(完备)测度空间. 如果E是一$S\times T$中的可测矩形，$E=A\times B,\varphi_E(x,y)$是其示性函数,则不仅对一切$x\in S,\varphi_E(x,y)$是$y$的可测函数，而且

$$\psi_E(x)\triangleq\int_T\varphi_E(x,y)d\nu=\begin{cases}\nu(B), & 当\ x\in A,\\ 0, & 当\ x\overline{\in}A,\end{cases}$$

还是x的可测函数

$$\int_S\psi_E(x)d\mu=\mu(A)\nu(B).$$

同样，
$$\int_T\left(\int_S\varphi_E(x,y)\,d\mu\right)d\nu=\mu(A)\nu(B).$$

所以

$$\int_S\left(\int_T\varphi_E(x,y)\,d\nu\right)d\mu=\int_T\left(\int_S\varphi_E(x,y)\,d\mu\right)d\nu.$$

由于可测矩形的交还是可测矩形，可测矩形的有限并都可表成互不相交的可测矩形的有限并，而当E是互不相交的可测矩形E_1, $E_2,\cdots,E_n$的有限并时，$\varphi_E(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_{E_i}(x,y)$,所以这时仍有

$$\int_S\left(\int_T\varphi_E(x,y)d\nu\right)d\mu=\int_T\left(\int_S\varphi_E(x,y)d\mu\right)d\nu.$$

总之对由可测矩形的有限并所构成的域(记为$\mathscr{C}$)中的任意E，上述等式成立. 现在我们来证明

引理2 对于乘积空间$(S\times T,\ \mathscr{A}\times\mathscr{B})$中的任意可测集$E$,积分

$$\int_T \varphi_E(x,y)d\nu \text{ 和} \int_S \varphi_E(x,y)\,d\mu$$

都分别是 x 的和 y 的可测函数，并且

$$\int_S\left(\int_T \varphi_E(x,\ y)d\nu\right)d\mu=\int_T\left(\int_S \varphi_E(x,y)\,d\mu\right)d\nu.$$

证明 令$\mathscr{F}$表 $S\times T$ 中所有使上述性质成立的可测集合所构成的集合．我们要证明 $\mathscr{F}=\mathscr{A}\times\mathscr{B}$，

首先注意，如果 $E_n\in\mathscr{F}, E_n\subset E_{n+1}$，$n=1,2,3,\cdots$，则 $\varphi_{E_n}(x,y)$ 是$S\times T$上的一串非负可测函数，$\varphi_n(x,y)\leqslant\varphi_{n+1}(x,y)$，并且

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{E_n}(x,y)=\varphi_E(x,y),$$

此处$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$．于是由 Levi 定理易见$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{F}$．同样，如果$E_n\in\mathscr{F}, E_n\supset E_{n+1}$，$n=1,2,3,\cdots$，则$\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{F}$，这是因为当$E\in\mathscr{F}$时，$E^c=S\times T-E$ 显然也属于$\mathscr{F}$．（注意 $\varphi_{E^c}(x,\ y)=1-\varphi_E(x,y)$及$\mu(S)<+\infty, \nu(T)<+\infty$．）另外我们还已知$\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$．

对于 $\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}$，如果

1° $\mathscr{C}\subset\mathscr{F}_1$，

2° 当 $E\in\mathscr{F}_1$ 时，$E^c\in\mathscr{F}_1$，

3° 从 $E_n, F_n\in\mathscr{F}_1, E_n\subset E_{n+1}, F_n\supset F_{n+1}, n=1,2,3,\cdots$，

恒能得出$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{F}_1$，$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\in\mathscr{F}_1$，

则我们就说 $\mathscr{F}_1$ 是 $\mathscr{F}$ 的一个正规子族．$\mathscr{F}$ 本身已知是 $\mathscr{F}$ 的正规子族，用 $\mathscr{F}_0$ 表 $\mathscr{F}$ 的所有正规子族的交，易见 $\mathscr{F}_0$ 仍是 $\mathscr{F}$ 的正规子族，它是 $\mathscr{F}$ 的最小正规子族．

对于任意 $G\in\mathscr{C}$，令

$\mathscr{H}(G)=\{E;E, E\cap G, E^c\cap G, E\cap G^c, E^c\cap G^c$ 都属于$\mathscr{F}\}$．

由于$\mathscr{C}$是一个域，$\mathscr{C}\subset\mathscr{H}(G)$. 又如果$E_n, F_n\in\mathscr{H}(G)$, $E_n\subset E_{n+1}$, $F_n\supset F_{n+1}$, $n=1,2,3,\cdots$, 则$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\in\mathscr{H}(G)$. 这是因为$\mathscr{F}$本身对于递增序列的并和递降序列的交是封闭的（即$\mathscr{F}$具有前边说的性质3°.）于是易见$\mathscr{H}(G)$是$\mathscr{F}$的一个正规子集，从而由$\mathscr{F}_0$的定义$\mathscr{H}(G)\supset\mathscr{F}_0$. 这证明对任意$G\in\mathscr{C}$, $E\in\mathscr{F}_0$,

$$G\cap E, G\cap E^c, G^c\cap E, G^c\cap E^c$$

都属于$\mathscr{F}$. 再取$\mathscr{F}_0$中任意元素H，用同样的办法作$\mathscr{H}(H)$，上面证明的事实就是$\mathscr{C}\subset\mathscr{H}(H)$. 于是$\mathscr{H}(H)$也是$\mathscr{F}$的一个正规子族，从而$\mathscr{F}_0\subset\mathscr{H}(H)$. 注意$H\in\mathscr{F}_0$任意，这证明$\mathscr{F}_0$是一个域，另外又已知$\mathscr{F}_0\supset\mathscr{C}$和$\mathscr{F}_0$从于递增序列的并、递降序列的交封闭，因此$\mathscr{F}_0$是包含$\mathscr{C}$的一个$\sigma$-域、由乘积$\sigma$-代数的定义$\mathscr{F}_0\supset\mathscr{A}\times\mathscr{B}$，于是$\mathscr{F}\supset\mathscr{A}\times\mathscr{B}$. 可是$\mathscr{F}$中元素都是乘积空间中的可测集. 因此$\mathscr{F}=\mathscr{A}\times\mathscr{B}$. 证完.

定义2 对于有限的测度空间$(S,\mathscr{A},\mu)$, $(T,\mathscr{B},\nu)$的乘积空间中的任意可测集$E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$，令

$$\alpha(E)=\int_S\left(\int_T\varphi_E(x,y)d\nu\right)d\mu=\int_T\left(\int_S\varphi_E(x,y)\,d\mu\right)d\nu,$$

易见它是定义于$\mathscr{A}\times\mathscr{B}$上的一个有限测度称之为$\mu$和$\nu$的**乘积测度**. 记为$\mu\times\nu$.

从前面的讨论我们知道当$E=A\times B$是可测矩形时，

$$(\mu\times\nu)(E)=\mu(A)\cdot\nu(B).$$

现在$(S\times T,\mathscr{A}\times\mathscr{B},\ \mu\times\nu)$成了一有限的测度空间. 但一般说来，它不是完备的、但仍可和完备的测度空间上一样定义函数的积分. 这时唯一不同的一点是$f(x,y)=g(x,y)$a.e.，并且$f(x,y)$可测时，$g(x,\ y)$不一定仍可测. 因此在这样的空间上讨论积分时原先的定理中条件里如果有a.e.的，一般都应去掉a.e.，改为

处处成立.

定理 3 (Fubini 定理) 设$(S\times T,\ \mathscr{A}\times\mathscr{B},\ \mu\times\nu)$是两个有限测度空间的乘积,则

(1) 对于非负可测函数 $f(x,\ y)$, $g(x)=\int_T f(x,y)d\nu$ 和 $h(y)=\int_S f(x,y)d\mu$ 分别是$(S,\mathscr{A})$和$(T,\mathscr{B})$上的非负可测函数并且

$$\int_{S\times T}f(x,\ y)d(\mu\times\nu)=\int_S g(x)d\mu=\int_T h(y)d\nu.$$

(2) 如果 $f(x,y)$是$(S\times T,\mathscr{A}\times\mathscr{B},\ \mu\times\nu)$上的可积函数, 则 μ-几乎对所有的 x, $f(x,\ y)$是 y 的可积函数, ν-几乎对所有的 y, $f(x,y)$是 x 的可积函数. 由

$$g(x)=\int_T f(x,y)d\nu,\ h(y)=\int_S f(x,\ y)d\mu$$

定义的函数仍然是可积的,并且有

$$\int_S g(x)d\mu=\int_T h(y)d\nu=\int_{S\times T}f(x,y)d(\mu\times\nu). \quad (*)$$

证明 先看(1) 当 $f(x,y)=\varphi_E(x,\ y)$是$E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$的示性函数时,

$$\int_{S\times T}f(x,y)d(\mu\times\nu)=(\mu\times\nu)(E),$$

所以从乘积测度定义即知所述结论为真, 于是当 $f(x,y)$是非负简单函数时所述结论也成立. 对于一般的非负可测函数 $f(x,y)$, 取一串非负的简单函数 $\varphi_n(x,y)$,使

$$\varphi_n(x,y)\leqslant\varphi_{n+1}(x,y),\quad n=1,2,\cdots,$$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x,y)=f(x,y),\quad (x,y)\in S\times T.$$

由 Levi 定理,

$$\int_{S\times T}f(x,y)d(\mu\times\nu)=\lim_{n\to\infty}\int_{S\times T}\varphi_n(x,y)d(\mu\times\nu).$$

$$\int_S f(x,\ y)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_S \varphi_n(x,y)d\mu,$$

$$\int_T f(x,y)\ d\nu = \lim_{n\to\infty}\int_T \varphi_n(x,y)d\nu.$$

注意

$$g_n(x) \triangleq \int_T \varphi_n(x,\ y)d\nu,\quad h_n(y) \triangleq \int_S \varphi_n(x,\ y)d\mu$$

都分别是 x 和 y 的非负可测函数，

$$g_n(x) \leqslant g_{n+1}(x),\ h_n(y) \leqslant h_{n+1}(y),\ n \geqslant 1.$$

所以同样由 Levi 定理有

$$\begin{aligned}\int_S\left(\int_T f(x,y)d\nu\right)d\mu &= \int_S\left(\lim_{n\to\infty}\int_T \varphi_n(x,\ y)d\nu\right)d\mu\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_S\left(\int_T \varphi_n(x,y)d\nu\right)d\mu\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{S\times T}\varphi_n(x,y)d(\mu\times\nu)\\ &= \int_{S\times T} f(x,y)d(\mu\times\nu).\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\int_T\left(\int_S f(x,y)d\mu\right)d\nu &= \int_T\left(\lim_{n\to\infty}\int_S \varphi_n(x,\ y)d\mu\right)d\nu\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_T\left(\int_S \varphi_n(x,\ y)d\mu\right)d\nu\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{S\times T}\varphi_n(x,y)d(\mu\times\nu)\\ &= \int_{S\times T} f(x,y)d(\mu\times\nu).\end{aligned}$$

再看(2). 因为这时 $|f(x,\ y)|$ 是非负可积函数. 所以由已证明的 (1), 有

$$\int_S\left(\int_T|f(x,y)|d\nu\right)d\mu=\int_T\left(\int_S|f(x,y)|d\mu\right)d\nu$$
$$=\int_{S\times T}|f(x,y)|d(\mu\times\nu)<+\infty.$$

从而

$$\int_T|f(x,y)|d\nu<+\infty \text{ a.e. }(\mu)\text{于 } S,$$
$$\int_S|f(x,y)|d\mu<+\infty \text{ a.e. }(\nu)\text{ 于 } T.$$

结合引理 1 便知 μ-几乎对所有的 x, $f(x,y)$是 y 的可积函数，ν-几乎对所有的 y, $f(x,y)$是 x 的可积函数.

$$g(x)=\int_T f(x,y)d\nu,\ h(y)=\int_S f(x,y)d\mu$$

分别是 μ-几乎和 ν-几乎处处有定义的函数. 分别考虑 $f(x,y)$的正部 $f^+(x,y)$和负部$f^-(x,y)$,注意到

$$g(x)=\int_T f^+(x,y)d\nu-\int_T f^-(x,y)d\nu,$$
$$h(y)=\int_S f^+(x,y)d\mu-\int_S f^-(x,y)d\mu.$$

便可从(1)得到 $g(x)$和$h(y)$的可积性和(*)式. 证完.

仿照"数学分析"中对累次积分的记法,(*)式常常被写成

$$\int_S d\mu\int_T f(x,y)d\nu=\int_T d\nu\int_S f(x,y)d\mu=\int_{S\times T}f(x,y)d(\mu\times\nu).$$

有关一般测度空间上的积分,我们就介绍到此为止. 作为结尾,我们再介绍一个名词:当$g(x)$是$\mathbb{R}^1$ 上的有界的单调递增的右连续函数,α_g 是由它产生的 Lebesgue-Stieltjes 测度时，在$(\mathbb{R}^1,\mathfrak{M}_g,\alpha_g)$上的积分称为关于$g(x)$的Lebesgue-Stieltjes 积分. $f(x)$在 $E\in\mathfrak{M}_g$上关于 $g(x)$ 的 Lebesgue-Stieltjes 积分通常记为$\int_E f(x)dg(x)$.

第六章　函数空间L^p

在本章中我们总考虑复值实变函数．首先，每一个复值实变函数$f(x)$都可以写成$f(x)=u(x)+iv(x)$的形式，其中$u(x)$，$v(x)$是两个实值的实变函数，称为$f(x)$的**实部**和**虚部**，这里i自然是**虚数单位**$\sqrt{-1}$．所谓$f(x)$ **可测**是指$u(x)$和$v(x)$都可测，当$u(x)$和$v(x)$都可积时，我们就说$f(x)$是**可积的**．又

$$|f(x)|=\{u^2(x)+v^2(x)\}^{1/2}$$

称为$f(x)$的**模**(函数)．由于

$$\max\{|u(x)|,|v(x)|\}\leqslant|f(x)|\leqslant|u(x)|+|u(x)|.$$

所以在已知$f(x)$可测时，$f(x)$可积的充要条件是$|f(x)|$可积，即复值实变函数的 Lebesgue 积分仍然是“绝对收敛”的．此外定义

$$\int_E f(x)dx=\int_E u(x)dx+i\int_E v(x)dx,$$

这时积分的一些初等性质以及 Fubini 定理和控制收敛定理等定理仍然成立．

在本世纪初，Hilbert 以有限线性方程组的解去逼近无穷线性方程组的解，研究了具有性质$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<+\infty$的数列$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$，后来Schmidt和Fréchet将Hilbert 的理论与欧氏空间相比较，便称$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$为空间中的点，而对于两个点$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$和$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)$ $\Big($注意$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<+\infty$，$\sum\limits_{j=1}^{\infty}|y_j|^2<$

$+\infty\Big)$定义它们之间的距离为

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2},$$

这便产生了现在称之为 l^2 空间的概念. 也许是受了 Fredholm理论的影响，在 1907 年 F. Riesz 和 Fréchet 同时提出把 l^2 中的点改为区间[0, 1]上的函数 $f(t)$，原来加于序列上的条件自然变成 $\int_0^1|f(t)|^2dt<+\infty$ 而得到所谓的空间 L^2. 这是一个与 R^n 很相似的空间. 后来人们又进一步推广这一思想而考虑使 $|f(t)|^p$ 可积的函数 $f(t)$，引出空间 L^p，（以下我们总假定 $p\geqslant1$，）这就是本章所要讨论的对象.

§1 空间 L^p.

以下我们总假定 E 是 R^n 中一可测集，$mE>0$. $p\geqslant1$ 是一给定的实数. 考察所有使 $|f(x)|^p$ 在 E 上可积的函数 $f(x)$ 所构成的函数类 $\mathscr{L}^p$，由于

$$|a+b|\leqslant2\max(|a|,|b|),$$

易见

$$|f(x)+g(x)|^p\leqslant2^p(|f(x)|^p+|g(x)|^p),$$

因此在 $f(x),g(x)$ 都属于 $\mathscr{L}^p$ 时，必有

$$af(x)+bg(x)\in\mathscr{L}^p,$$

其中 a,b 可以是任意的常数. 这表明 $\mathscr{L}^p$ 是一线性系统.

任意 $f(x),g(x)\in\mathscr{L}^p$ 定义

$$\rho\Big(f(x),g(x)\Big)=\left(\int_E|f(x)-g(x)|^pdx\right)^{1/p}.$$

既然 $\mathscr{L}^p$ 是一线性系统，所以

$$0\leqslant\rho(f(x),g(x))<+\infty.$$

显然 $\rho(f(x),f(x))=0$. 但是从 $\rho(f(x),g(x))=0$, 却只能推出 $f(x)=g(x)$ a.e. 于 E, 而不能得出一定有 $f(x)=g(x)$. 另外如果

$$f(x)=f_1(x),g(x)=g_1(x)\ \text{a.e. 于}\ E,$$

则 $f(x)-g(x)=f_1(x)-g_1(x)$ a.e. 于 E, 从而

$$\rho(f(x),g(x))=\rho(f_1(x),g_1(x)),$$

所以我们不应该把 $\mathscr{L}^p$ 中的函数看成点，而应该把 $\mathscr{L}^p$ 中的函数加以分类，使同一类中任意两个函数都是在 E 上几乎处处相等的，而属于不同类的函数则不会几乎处处相等. 然后把如此得到的那些函数类做为空间中的点. 对于分别包含 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的两个类(点)定义其间的距离为

$$\left(\int_E|f(x)-g(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

我们以后就用 $L^p(E)$ 来表示用上述方式定义好了点与点之间的距离的函数类的集合，称之为(E 上的)函数空间 $L^p(E)$. (当无必要特别标明 E 时，可简记为 L^p. 又 $L^1(E)$ 常简记为 $L(E)$ 或 L). 对于 $L^p(E)$ 中包含 $f(x)$ 的类，就记为 f 而且还称为函数，也就是说不严格区分 $L^p(E)$ 中的元素与 $\mathscr{L}^p$ 中的函数.

欧氏空间中点与点之间距离三个最基本的性质是:

(i) $\rho(x,y)\geqslant0$, $\rho(x,y)=0$ 在且只在 $x=y$ 时成立.

(ii) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$.

(iii) $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$.

对于 L^p 中的距离来说，(i)已知成立，(ii)是显然成立的. 下面我们要证明(iii)也成立. 为此需要先来证明一些重要的不等式.

首先，从 Lagrange 中值定理易见

$$x^m-1\leqslant m(x-1)\quad(x\geqslant1,0<m<1)$$

并且等号在且只在 $x=1$ 时才成立．现在令 $x=\frac{a}{b}$ $(a\geqslant b>0)$，则得

$$\frac{a^m}{b^m}-1\leqslant m\left(\frac{a}{b}-1\right),$$

并且等号在且只在 $a=b$ 时成立．两端同乘以 b，则

$$a^m b^{1-m}\leqslant b+m(a-b)=am+b(1-m).$$

令 $\alpha=m,\beta=1-m$，则 $\alpha+\beta=1$，

$$a^\alpha b^\beta\leqslant a\alpha+b\beta, \tag{1}$$

并且等号在且只在 $a=b$ 时成立．

定理 1 （Hölder 不等式） 如果 $p>1,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$f\in L^p(E)$，$g\in L^q(E)$，则 $fg\in L^1(E)$ 并且

$$\int_E|f(x)g(x)|dx\leqslant\left(\int_E|f(x)|^p dx\right)^{1/p}\left(\int_E|g(x)|^q dx\right)^{1/q} \tag{2}$$

其中等号在且只在 $|f|^p$ 和 $|g|^q$ 相差一常数因子时成立．（通常称满足定理中条件的一对 p,q 为一对共轭指数）．

证明 如果 f，g 中有一个是零，则(2) 式左右两边都是零．等式成立．以下设 f,g 都不是零．于是

$$\int_E|f(x)|^p dx>0,\quad \int_E|g(x)|^q dx>0.$$

由(1)式，对 $x\in E$，如果 $|f(x)|,|g(x)|$ 都大于零，则

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\left(\int_E|f(x)|^p dx\right)^{1/p}\left(\int_E|g(x)|^q dx\right)^{1/q}}$$

$$\leqslant\frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\int_E|f(x)|^p dx}+\frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\int_E|g(x)|^q dx}, \tag{3}$$

将上式两边都在 E 上积分便得到(2)式，而且易见要使(2)式中等号成立，必须且只需(3)式中的等号几乎对所有的 $x\in E$ 都成立．

由于(1)式中等号成立的充要条件是 $a=b$，所以(3)式中等号成立的充要条件是

$$\frac{|f(x)|^p}{\int_E |f(x)|^p dx}=\frac{|g(x)|^q}{\int_E |g(x)|^q dx},$$

即 $|f|^p$ 和 $|g|^q$ 只差一常数因子. 所以(2)式在且只在 $|f|^p$ 和 $|g|^q$ 相差一常数因子时成立. 证完.

因为

$$\left|\int_E f(x)g(x)dx\right|\leqslant\int_E |f(x)g(x)|dx.$$

所以从定理 1 立即可知

$$\left|\int_E f(x)g(x)dx\right|\leqslant\left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{1/p}\left(\int_E |g(x)|^q\right)^{1/q}. \quad (2)'$$

定理 2 (Minkowski 不等式) 如果 $p\geqslant 1, f, g\in L^p(E)$, 则

$$\left(\int_E |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{1/p}$$
$$\leqslant\left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{1/p}+\left(\int_E |g(x)|^p dx\right)^{1/p}. \quad (4)$$

当 $p>1$ 时，上式中的等号在且只在 f 和 g 相差一非负常数因子时成立.

证明 $p=1$ 及 $p>1$ 且 $\int_E |f(x)+g(x)|^p dx=0$ 时，(4) 式是显然成立的. 现设 $p>1$, $\int_E |f(x)+g(x)|^p dx>0$. 令 $q=\dfrac{p}{p-1}$，则 p, q 是一对共轭指数，取

$$h(x)=|f(x)+g(x)|^{p/q},$$

则 $h\in L^q(E)$. 所以由 Hölder 不等式知

$$\int_E |f(x)|h(x)dx\leqslant\left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\int_E |g(x)|h(x)dx \leqslant \left(\int_E |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{q}}, \quad (5)$$

注意$\frac{p}{q}=p-1$,便得

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)+g(x)|^p dx &= \int_E |f(x)+g(x)|h(x)dx \\ &\leqslant \int_E |f(x)|h(x)dx + \int_E |g(x)|h(x)dx \\ &\leqslant \left\{\left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \right.\\ &\quad \left. + \left(\int_E |g(x)|^p dx\right)^{1/p}\right\}\left(\int_E |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{1/q}. \quad (6)\end{aligned}$$

以$\left(\int_E |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{1/q}$除上式两端,便得(4)式.

要使(4)式中的等号成立,必须且只需(5)和(6)中第一个不等式都是等式. 使(5)中二式为等式的充要条件是$|f|^p$, $|g|^p$都只和h^q差一常数因子. 由于$h\neq 0$, 所以$|f|^p$和$|g|^p$之间也只差一常数因子,比如说$|f|^p=\lambda|g|^p$. 如果$\lambda=0$,则

$$f(x)=0\cdot g(x) \text{ a.e. 于} E$$

如果$\lambda>0$,则

$$|f(x)|=\lambda^{1/p}|g(x)| \text{ a.e. 于} E. \quad (7)$$

现在进一步考查使(6)中第一个不等式成为等式的条件. 首先注意$h\neq 0$, $|f|^p$, $|g|^p$都和h^q只相差一常数因子. 因此几乎所有使$h(x)=0$的x都使$f(x)=g(x)=0$. 令$E_1=E[x;\ h(x)>0]$, 则$mE_1>0$. 要(6)式中第一个不等式是等式, 就是要在E_1上几乎处处有

$$|f(x)+g(x)|=|f(x)|+|g(x)|.$$

这相当于说要$f(x)$和$g(x)$的辐角$\operatorname{Arg}f(x)$和$\operatorname{Arg}g(x)$在E_1上几乎处处相等(注意,由(7)式及在E_1上$h>0$,知在E_1上$f(x)$, $g(x)$

都是几乎处处不等于零的)，于是从(7)式及在 $E-E_1$ 上 $f(x)=g(x)=0$ a.e. 便得到

$$f(x)=\lambda^{1/p}g(x) \text{ a.e. 于} E.$$

即 f 和 g 只相差一非负常数因子. 证完.

有了 Minkowski 不等式，我们立即便可证明 $L^p(E)$中点与点间的距离也是具有性质(iii)的，即有下述"三角不等式"成立:

$$\rho(f,g)\leqslant\rho(f,h)+\rho(h,g),$$

其中 $f,g,h\in L^p(E)$ 是任意的点. 事实上

$$\begin{aligned}\rho(f,g)&=\left(\int_E|f(x)-g(x)|^p dx\right)^{1/p}\\&\leqslant\left(\int_E(|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|)^p dx\right)^{1/p}\\&\leqslant\left(\int_E|f(x)-h(x)|^p dx\right)^{1/p}+\left(\int_E|h(x)-g(x)|^p dx\right)^{1/p}\\&=\rho(f,h)+\rho(h,g).\end{aligned}$$

对于 $f\in L^p(E)$，我们令

$$\|f\|_p=\rho(f,0)=\left(\int_E|f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

称之为 f 的范数(Norm). 于是

(i) $\|f\|_p\geqslant0$, $\|f\|_p=0$ 当且仅当 $f=0$.

(ii) $\|\alpha f\|_p=|\alpha|\,\|f\|_p$, 对任意复数 α.

(iii) $\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p\,(f,g\in L^p(E))$.

例 1 我们前面已申明 p 是不小于 1 的实数. 应该指出当 $0<p<1$ 时，Minkowski 不等式一般说来是不成立的，比如 $p=\frac{1}{2}$, $E=[0,2]$,

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant1,\\0, & 1<x\leqslant2,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant1,\\1, & 1<x\leqslant2,\end{cases}$$

则$|f|^{\frac{1}{2}}$, $|g|^{\frac{1}{2}}$都是在E上可积的．或者说$f, g\in L^{\frac{1}{2}}([0,2])$，但是

$$\left(\int_0^2 |f(x)+g(x)|^{\frac{1}{2}}dx\right)^2=\left(\int_0^2 1dx\right)^2=4,$$

而

$$\left(\int_0^2 |f(x)|^{\frac{1}{2}}dx\right)^2=\left(\int_0^1 1dx\right)^2=1,$$

$$\left(\int_0^2 |g(x)|^{\frac{1}{2}}dx\right)^2=\left(\int_1^2 1dx\right)^2=1.$$

所以

$$\left(\int_0^2 |f(x)+g(x)|^{\frac{1}{2}}dx\right)^2>\left(\int_0^2 |f(x)|^{\frac{1}{2}}dx\right)^2+\left(\int_0^2 |g(x)|^{\frac{1}{2}}dx\right)^2.$$

在$L^p(E)$，$0<p<1$，中 Minkowski 不等式不成立，所以不能用$\left(\int_E |f(x)-g(x)|^p dx\right)^{1/p}$来定义两点$f$，$g$之间的距离．由于当$0<p<1$时，$f(x)=(1+x)^p-1-x^p$的导数在$x>0$时为负，所以

$$|a+b|^p\leqslant a^p+b^p \quad (a,b\geqslant 0).$$

从而如果$f(x), g(x)$都是E上的可测函数，$|f(x)|^p$, $|g(x)|^p$在E上可积，则

$$\int_E |f(x)+g(x)|^p dx\leqslant\int_E |f(x)|^p dx+\int_E |g(x)|^p dx.$$

从而对于任意$f, g, h\in L^p(E)$，都有，

$$\int_E |f(x)-g(x)|^p dx\leqslant\int_E |f(x)-h(x)|^p dx+\int_E |h(x)-g(x)|^p dx.$$

这说明对于$L^p(E)$，$0<p<1$，我们应该用

$$\rho(f,g)=\int_E |f(x)-g(x)|^p dx$$

来定义两点f，g之间的距离．这时性质(i)(ii)(iii)都具备．可是一般说来

$$\rho(\alpha f, 0)=\int_E |\alpha f(x)|^p dx=|\alpha|^p\int_E |f(x)|^p dx$$

$$\neq|\alpha|\int_E|f(x)|^p dx.$$

所以这时

$$\|f\|_p=\rho(f,0)=\int_E|f(x)|^p dx$$

不是 $L^p(E)$ 上的一个范数，因为它不具备范数的性质(ii). 正是由于当 $0<p<1$ 时的 L^p 和 $p\geqslant1$ 时的 L^p 之间的这种质的差异，我们才总限定 $p\geqslant1$.

在 $L^p(E)$ 中既已建立了距离概念，自然就可以定义极限：

定义 1 设 $f\in L^p(E)$, $f_n\in L^p(E)$, $n=1,2,3,\cdots$. 如果当 $n\to\infty$ 时，$\rho(f_n,f)\to0$，亦即 $\|f_n-f\|_p\to0$，则我们就说 f_n 是 **p-方平均收敛**于 f 的，或说 f_n 是在 $L^p(E)$ 中收敛于 f 的，记为

$$\mathscr{L}\lim_{n\to\infty}f_n=f.$$

例 2 设 $f(x)\equiv0$,

$$f_n(x)=\begin{cases}n^2, & \text{当}0<x<\dfrac{1}{n}\text{时}\\ 0, & \text{在别处,}\end{cases}$$

则在 $[0,1]$ 上显然有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x).$$

但当把它们视为 $L^p([0,1])(p\geqslant1)$ 中的元素时，

$$\rho(f_n,f)=\left(\int_0^1|f_n(x)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}=n^{2-\frac{1}{p}}\to+\infty,$$

所以在 $L^p([0,1])$ 中，$\mathscr{L}\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$ 不成立.

例 3 若 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是第四章 §5 的例中所作的那串函数，$\varphi(x)\equiv0$，则当 $p\geqslant1$ 时，在 $L^p([0,1])$ 上

$$\rho(\varphi_n,\varphi)=\left(\int_0^1|\varphi_n(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\to0\quad(n\to\infty).$$

即 $\mathscr{L}\underset{n\to\infty}{\mathrm{im}}\varphi_n=\varphi$. 但是$\{\varphi_n(x)\}$在$[0,1]$上是处处不收敛于 $\varphi(x)$的.（因为它是处处无极限的.）

应该指出平均收敛的概念是有广泛应用的. 举例来说，我们知道确实有些物理问题所列出的偏微分方程边值问题根本没有可微的解. 面对着这个情况，能说这个物理问题没有意义吗？因为微分方程边值问题，常常只是所讨论的实际问题的一种近似，一种理想化的情况. 它的那些系数都不是准确的. 所以我们应该从近似的观点来看待边值问题，一定要在连续可微函数的范围内寻求方程的解，往往是没有道理的. 为此人们引进广义解的概念. 例如对波动方程

$$\begin{cases}\Delta u-\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=F,\\ u(x,y,z,0)=u'_t(x,y,z,0)=0,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_s=0.\end{cases}\tag{8}$$

S. L. Sobolev 就考虑一串函数 $F_1,F_2,\cdots$使

$$\lim_{n\to\infty}\iiint_\Omega(F_n-F)^2dxdydz=0,$$

假如

$$\begin{cases}\Delta u-\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=F_n,\\ u(x,y,z,0)=u'_t(x,y,z,0)=0\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_s=0\end{cases}$$

的寻常解 u_n 使得

$$\lim_{n\to\infty}\iiint_\Omega(u_n-u)^2dxdydz=0,$$

他就说 u 是方程式(8)的广义解. 广义解是有实际的物理意义的①.

定理 3 如果在 $L^p(E)$ 中 $\underset{n\to\infty}{\mathscr{L}\mathrm{im}} f_n=f$, 则在 E 上 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$.

证明 对于 $\sigma>0$, 令

$$A_n(\sigma)=E[x; |f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma],$$

则

$$\int_E |f_n(x)-f(x)|^p dx \geqslant \int_{A_n(\sigma)} |f_n(x)-f(x)|^p dx$$
$$\geqslant \sigma^p m A_n(\sigma)\geqslant 0.$$

由于 $\underset{n\to\infty}{\mathscr{L}\mathrm{im}} f_n=f$, 所以上式左边趋于零, 而 $\sigma>0$, 所以必有 $mA_n(\sigma)\to 0$.

定理 4 如果在 $L^p(E)$ 中, $\underset{n\to\infty}{\mathscr{L}\mathrm{im}} f_n=f$, 又在 E 上几乎处处有 $\underset{n\to\infty}{\mathscr{L}\mathrm{im}} f_n(x)=g(x)$, 则 $f=g$.

证明 从定理 3, $f_n(x)\Rightarrow f(x)$, 因此由 F. Riesz 定理, 有 $\{f_n(x)\}$ 的子序列 $\{f_{n_i}(x)\}$ 使 $\lim\limits_{i\to\infty} f_{n_i}(x)=f(x)$ a. e. 于 E. 由于已知 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=g(x)$ a. e. 于 E, 所以 $f(x)=g(x)$ a. e. 于 E.

定理 5 $L^p(E)$ 中序列的极限是唯一的. 即如果 $\underset{n\to\infty}{\mathscr{L}\mathrm{im}} f_n=f$, $\underset{n\to\infty}{\mathscr{L}\mathrm{im}} f_n=g$, 则 $f=g$.

证明 这可以直接从距离的三角不等式即性质(iii)而得出, 因为

$$0\leqslant\rho(f,g)\leqslant\rho(f,f_n)+\rho(f_n,g)\to 0.$$

也可以从定理 3 得到.

定理 6 (范数的连续性) 如果在 $L^p(E)$ 中 $\underset{n\to\infty}{\mathscr{L}\mathrm{im}} f_n=f$, 则

① S. L. Sobolev,《数学物理方程》, 1954 年版, 第 22 讲.

$\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

证明 由于

$$\|f\|_p \leqslant \|f-f_n\|_p + \|f_n\|_p.$$

$$\|f_n\|_p \leqslant \|f_n - f\|_p + \|f\|_p.$$

$$\|f-f_n\|_p = \|f_n - f\|_p = \rho(f_n, f) \to 0.$$

所以

$$\|f\|_p \leqslant \varliminf_{n\to\infty}(\|f-f_n\|_p + \|f_n\|_p)$$

$$= \varliminf_{n\to\infty}\|f_n\|_p \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\|f_n\|_p$$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}(\|f_n - f\|_p + \|f\|_p) = \|f\|_p.$$

这也就是说

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_p = \|f\|_p.$$

在欧氏空间中，关于点列的收敛有著名的 Cauchy 准则. 现在我们也有与之相应的下述定理 7.

定理 7(L^p的完全性) 设$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是$L^p(E)$ $(p\geqslant 1)$中的一个序列,则存在 $f\in L^p(E)$使$\mathscr{L}\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ 的充要条件是对于任意 $\varepsilon>0$, 都有N使 $m>n\geqslant N$ 时,

$$\rho(f_n, f_m) = \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$

满足这样的条件的序列称为 $L^p(E)$中的**基本序列**.

证明 必要性是显然的,因为

$$\rho(f_n, f_m) \leqslant \rho(f_n, f) + \rho(f, f_m).$$

以下我们来证明充分性. 设 $\{f_n\}$是 $L^p(E)$中一基本序列. 由归纳法,可选取正整数序列$\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$,使

$$m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots,$$

而且当 $n\geqslant m_k$ 时,

$$\|f_n - f_{m_k}\|_p < \frac{1}{2^k}, \quad k=1,2,3,\cdots.$$

令 $$g_m(x) = \sum_{k=1}^{m} |f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)|, \quad m=1,2,3,\cdots$$

则 $\{g_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ 是 E 上的非负可测函数的单调递增序列. 记 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ 为 $g(x)$. 由于这时也有

$$\lim_{n\to\infty}(g_m(x))^p = (g(x))^p.$$

由 Fatou 引理,

$$\int_E (g(x))^p dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E (g_m(x))^p dx.$$

可是由 Minkowski 不等式知

$$\left(\int_E \left(g_m(x)\right)^p dx\right)^{1/p} \leqslant \sum_{k=1}^{m} \left(\int_E |f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \|f_{m_{k+1}} - f_{m_k}\|_p < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} < 1,$$

所以

$$\int_E (g(x))^p dx \leqslant 1.$$

这说明 $g(x)$ 必然是在 E 上几乎处处有限,从而函数级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)\right)$$

在 E 上几乎处处绝对收敛. 令

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)),$$

则 $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{m_k}(x)$, 又

$$|f(x)| \leqslant |f_{m_1}(x)| + g(x) \text{ a.e. 于 } E.$$

所以 $f\in L^p(E)$.

对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 取 N 使 $n\geqslant m\geqslant N$ 时

$$\|f_n-f_m\|_p<\varepsilon.$$

则当 k 充分大使 $m_k\geqslant N$ 时, 对一切 $n\geqslant N$ 都有

$$\|f_n-f_{m_k}\|_p<\varepsilon.$$

注意

$$\lim_{k\to\infty}|f_n(x)-f_{m_k}(x)|^p=|f_n(x)-f(x)|^p \text{ a.e. 于 } E.$$

再次应用 Fatou 引理, 便得

$$\begin{aligned}\|f_n-f\|_p&=\left(\int_E|f_n(x)-f(x)|^p dx\right)^{1/p}\\&\leqslant\left(\liminf_{k\to\infty}\int_E|f_n(x)-f_{m_k}(x)|^p dx\right)^{1/p}\\&\leqslant\varepsilon\quad(n\geqslant N).\end{aligned}$$

这说明

$$\mathscr{L}\mathrm{im}_{n\to\infty} f_n=f.$$

证完.

例 4 区间$[0,1]$上全体 Riemann 可积函数按距离

$$d(f,g)=\left\{\int_0^1|f(x)-g(x)|^2 dx\right\}^{1/2}$$

构成的空间是不完全的.

证明 将$(0, 1)$上全体有理数排成序列$\{r_n\}$. 对每一 n 作包含于$[0, 1]$内的开区间 I_n, 使 $r_n\in I_n$ 且长度$|I_n|<1/2^n$, 然后作函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n,\\ 0, & \text{当 } x\in E_0=[0,1]-\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n.\end{cases}$$

及函数序列$\{f_n(x)\}$：

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in\bigcup_{k=1}^{n} I_k,\\ 0, & \text{在别处.}\end{cases}\quad n=1,2,3,\cdots$$

易见在$[0,1]$上处处有$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$. 注意若 $m>n$，则

$$f_m(x)-f_n(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in\bigcup_{k=n+1}^{m} I_k\\ 0, & \text{在别处.}\end{cases}$$

及 $m\left(\bigcup_{k=n+1}^{m} I_k\right)\leqslant\sum_{k=n+1}^{m}|I_k|<\sum_{k=n+1}^{m}1/2^k\to 0$（当 $n,m\to\infty$）便知

$$\lim_{m,n\to\infty} d(f_n,f_m)=0.$$

由定理 7，应有 $g\in L^2([0,1])$使$\mathscr{L}\lim_{n\to\infty} f_n=g$. 以下我们来证明任何这样的 g 都不可能在$[0,1]$上 Riemann 可积.

首先注意由定理 4，应有 $g(x)=f(x)$ a. e. 设 E_1 是$[0,1]$中测度为零的子集，使

$$g(x)=f(x)，\text{当 } x\in[0,1]-E_1,$$

则 $m(E_0-E_1)>0$. 现设 $x_0\in E_0-E_1$. 对每一正整数 n，取充分大的 k_n，使

$$|x_0-r_{k_n}|<1/2^{n+1},\quad |I_{k_n}|<1/2^{k_n}<1/2^{n+1}.$$

由于 $mE_1=0$，$I_{k_n}-E_1$ 非空，我们可取 $x_n\in I_{k_n}-E_1$. 于是

$$|x_n-x_0|\leqslant|x_n-r_{k_n}|+|r_{k_n}-x_0|<\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^n}.$$

这说明$\lim_{n\to\infty} x_n=x_0$. 注意 $x_n\in I_k$，$x_n\overline{\in} E_1$，所以 $g(x_n)=f(x_n)=1$，而 $x_0\in E_0-E_1$，故 $g(x_0)=f(x_0)=0$. 可见$\lim_{n\to\infty} g(x_n)=1\neq g(x_0)$. 即$g(x)$在 x_0 点不连续. 由于 $x_0\in E_0-E_1$ 任意，$m(E_0-E_1)>0$，由第五章

§2 定理 2 便知 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上不是 Riemann 可积的.

在欧氏空间中存在可数的在全空间中稠密的点集，比如坐标全是有理数的点的集合，这是一个很重要的性质，人们特别称之为空间的**可分性质**. 以下我们来证明 $L^p(E)\,(1\leqslant p<+\infty)$ 也是可分的. 为简便计，我们现在且只就 $E=[a,b]\subset\mathbf{R}^1$ 的情形来证明.

引理 1 如果 $f\in L^p([a,b])\,(1\leqslant p<+\infty)$，则对于任意 $\varepsilon>0$，都有 $[a,b]$ 上的连续函数 $\varphi(x)$ 使 $\|f-\varphi\|_p<\varepsilon$.

证明 如果 $f(x)=u(x)+iv(x)\in L^p$，$\varphi(x)=\xi(x)+i\eta(x)$，$\xi(x),\eta(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，则由 Minkowski 不等式知

$$\|f-\varphi\|_p\leqslant\|u-\xi\|_p+\|v-\eta\|_p.$$

注意 u,v 都是 $L^p([a,b])$ 中的只取实值的函数，所以我们不妨假设 $f(x)$ 是只取实值的.

先设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是有界的，

$$|f(x)|\leqslant M,\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

这时对任意 $\delta>0$，都有连续函数 $\varphi(x)$ 及 $E\subset[a,b]$ 使 $|\varphi(x)|\leqslant M$，$mE<\delta$ 而在 $[a,b]-E$ 上

$$f(x)=\varphi(x).$$

(见第四章 §3 定理 2). 于是

$$\begin{aligned}\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|^p dx&=\int_E|f-\varphi|^p dx+\int_{[a,b]-E}|f-\varphi|^p dx\\&\leqslant\int_E(|f|+|\varphi|)^p dx\\&<2^pM^p\delta.\end{aligned}$$

因此只要适当选取 δ，便可使 $\|f-\varphi\|_p<\varepsilon$.

对于在 $[a,b]$ 上无界的 f，根据第五章 §2 定理 5，有 $\delta>0$，使 $A\subset[a,b]$，$mA<\delta$ 时，

$$\int_A|f(x)|^p dx<\varepsilon^p/2^p.$$

再由第五章 §1 习题的第 8 题，有正整数 N 使

$$m\{x; a\leqslant x\leqslant b, |f(x)|\geqslant N\}<\delta,$$

令

$$F(x)=\begin{cases}f(x), \text{当} |f(x)|<N \text{时},\\ 0, \quad \text{在别处}\end{cases}$$

则 $F\in L^p$ 且 $|F(x)|\leqslant N$，即 $F(x)$ 还是有界的．若令

$$E_N=\{x; a\leqslant x\leqslant b, |f(x)|\geqslant N\},$$

则

$$\int_a^b |f(x)-F(x)|^p dx=\int_{E_N} |f(x)|^p dx<\frac{\varepsilon^p}{2^p},$$

所以

$$\|f-F\|_p<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

对于有界的 $F(x)$，由前段的证明有连续函数 $\varphi(x)$，使 $\|F-\varphi\|_p<\frac{\varepsilon}{2}$，结合(9)式便得

$$\|f-\varphi\|_p\leqslant\|f-F\|_p+\|F-\varphi\|_p<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

可见定理成立．

定理 8 若 $f\in L^p([a,b])$ $(p\geqslant 1)$，则对于任意 $\varepsilon>0$，恒有有理系数多项式 $p_1(x), p_2(x)$，使 f 与 $\psi(x)=p_1(x)+ip_2(x)$ 的距离小于 ε，即 $\|f-\psi\|_p<\varepsilon$．

证明 设 $f(x)=u(x)+iv(x)$，则 u, v 都是 $L^p([a, b])$ 中的只取实值的函数．由 Minkowski 不等式，我们只要证明有有理系数多项式 $p_1(x)$ 使 $\|u-p_1\|_p<\varepsilon/2$ 就可以了．首先从引理 1 及其证明知有实值连续函数 $\varphi(x)$，使

$$\|u-\varphi\|_p<\varepsilon/8. \tag{10}$$

其次根据 Weierstrass 多项式逼近定理，对 $\varphi(x)$ 可取实系数多

项式

$$g(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,$$

使

$$\|\varphi-g\|_p<\varepsilon/8. \tag{11}$$

最后，利用有理数在$\mathbb{R}^1$上的稠密性，对每一a_i都选一有理数r_i，使

$$|a_i-r_i|<\varepsilon/(8n\max\{(b-a)^{1/p},\|x\|_p,\cdots,\|x^n\|_p\}),$$

则由 Minkowski 不等式，对$p_1(x)=r_0+r_1x+\cdots+r_nx^n$有

$$\|g-p_1\|_p<\varepsilon/8. \tag{12}$$

联结(10)，(11)，(12)式即得

$$\|u-p_1\|_p\leqslant\|u-\varphi\|_p+\|\varphi-g\|_p+\|g-p_1\|_p$$

$$<\frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{8}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

证完.

因为全体有理系数多项式构成一可数集合，所以定理8中的ψ那样的函数也构成L^p中的一可数集合，这样我们已证明了$L^p([a,b])$是可分的.

迄今为止，我们还没有发现L^p空间和普通的欧氏空间的重大差别，欧氏空间中有距离，L^p空间中也有距离，欧氏空间是完全的(Cauchy 定理)，L^p也是完全的，欧氏空间是可分的，L^p空间也是可分的，现在我们要说明欧氏空间中的一个重要性质不为L^p所具备.

定义 2 设M是一个定义好了距离的空间，自然也就可以仿照欧氏空间来定义邻域，凝聚点等概念。我们规定，如果对于M中的任意点a，恒有a的某一邻域$N(a,\delta)$，使任意属于$N(a,\delta)$的无穷点集均存在凝聚点，则称M是局部列紧的空间.

因为在欧氏空间中，Weierstrass-Bolzano 定理成立，所以欧

氏空间是局部列紧空间，但是这个重要的性质，L^p 不具备，即 L^p 空间是非局部列紧空间。要证明这点，我们只要证明能在 L^p 中找到一点 f，使包含 f 的任何邻域中，都至少有一无穷序列没有凝聚点即可，以下就 $L^p[0,1]$，$p\geqslant 2$ 来考虑。取 $f=0$，于任意正数 δ，取 $d>0$ 使 $d<\delta$，令 $f_n(x)=d\cos(2n\pi x)$，则 $f_n(x)\in L^p$，且

$$\int_0^1 |f_n(x)|^p dx\leqslant d^p\int_0^1 dx=d^p<\delta^p,$$

即

$$f_n\in N(0,\delta)\triangleq\{f;f\in L^p,\|f\|_p<\delta\}.$$

可是只要 $n\neq m$，就有

$$\begin{aligned}\|f_n-f_m\|_2^2&=\int_0^1 d^2[\cos(2n\pi x)-\cos(2m\pi)x]^2dx\\&=d^2\int_0^1\cos^2(2n\pi x)dx+d^2\int_0^1\cos^2(2m\pi x)dx\\&\quad-2d^2\int_0^1\cos(2n\pi x)\cos(2m\pi x)dx\\&=\frac{d^2}{2}+\frac{d^2}{2}=d^2.\end{aligned}$$

从而 $\|f_n-f_m\|_2=d$ $(n\neq m)$. 如果 $p>2$，则由 Hölder 不等式，

$$\int_0^1|f_n-f_m|^2dx\leqslant\left(\int_0^1|f_n-f_m|^{2\cdot\frac{p}{2}}dx\right)^{\frac{2}{p}}\left(\int_0^1 1^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

这里 $q=\frac{p}{p-1}$. 两边开方即得

$$d=\|f_n-f_m\|_2\leqslant\|f_n-f_m\|_p.$$

这说明在 $L^p([0,1])(p\geqslant 2)$ 中，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 没有聚点.

从上面的反例，可见经典数学分析中有关聚点原则的一套行之有效的技巧，在 $L^p(p\geqslant 2)$ 中都不能直接照搬了. 所以问题是严重的. 泛函分析中许多重要概念，例如弱拓扑等的引进正是渊源于此.

习　题

1. 证明：当 $mE<+\infty$，$p'>p$ 时，$L^{p'}(E)\subset L^{p}(E)$．并就 $E=[0,1]$ 举例说明 $L^{p'}\neq L^{p}$．

2. 就 $E=\mathbf{R}^1$ 的情形举例说明：当 $mE=+\infty$ 时，$L^{p}(E)$ 和 $L^{p'}(E)$ 互不包含，此处 $p'>p\geqslant 1$．

3. 证明：如果 $f\in L^{p}(E)\cap L^{p'}(E)$，$1\leqslant p<r<p'$，则有 $f\in L^{r}(E)$．

4. 证明：如果 $g\in L^{p}(E)$，$f_n\in L^{p}(E)$，$|f_n(x)|\leqslant g(x)$，$n=1,2,3,\cdots$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ a.e. 于 E，则 $\mathscr{L}\text{im}_{n\to\infty}f_n=f$．

5. 设 p,q 是一对共轭指数，$f_n\in L^{p}(E)$，$g_n\in L^{q}(E)$，$n=1,2,3,\cdots$ 并且在 $L^{p}(E)$ 和 $L^{q}(E)$ 中分别有 $\mathscr{L}\text{im}_{n\to\infty}f_n=f$ 和 $\mathscr{L}\text{im}_{n\to\infty}g_n=g$．证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\overline{g_n(x)}dx=\int_E f(x)\overline{g(x)}dx.$$

此处 $\overline{g_n(x)}$，$\overline{g(x)}$ 分别是 $g_n(x)$ 和 $g(x)$ 的共轭．

6. 用 $L^{\infty}(E)$ 表示在 E 上几乎有界（即有 N，使 $mN=0$，而在 $E-N$ 上有界）的可测函数的全体．并在 $L^{\infty}(E)$ 中规定

$$\rho(f,g)=\inf\{\sup_{x\in E-N}|f(x)-g(x)|;N\subset E,mN=0\}$$

为 f 与 g 之间的距离（几乎处处相等的函数看成相同），则 $L^{\infty}(E)$ 不可分．

7. 设 E 是 $\mathbf{R}^1$ 中区间 $[a,b]$ 的一可测子集，$mE>0$．试利用 $L^{p}([a,b])$ 的可分性证明 $L^{p}(E)$ 的可分性．

8. 证明 $L^{p}(E)$ 中那些只取实值的函数构成 $L^{p}(E)$ 的一闭实线性子空间 $L^{p}_{(r)}(E)$，（即 $L^{p}_{(r)}(E)$ 是 $L^{p}(E)$ 的实线性子空间并且还是 $L^{p}(E)$ 的闭子集．）从而也是完全的．

9. 设 $mE<+\infty,p\geqslant$

$$L_0=\left\{f;f\in L^{p}(E),\int_E f(x)dx=0\right\}.$$

证明 L_0 是 $L^{p}(E)$ 的闭线性子空间且在 $L^{p}(E)$ 中的亏数为 1，即可以取 $L^{p}(E)$ 的一个一维子空间 T，使 $L^{p}(E)$ 是 L_0 和 T 的直接和：$L^{p}(E)=L_0\oplus T$．

§2　Hilbert 空间 L^2

函数空间 $L^2(E)$ 是空间 $L^{p}(E)(p\geqslant 1)$ 的一特殊情况，但是它

有一般的 $L^p(E)$ 所不具有的重要特性，即在 $L^2(E)$ 中可以引进向量之间的夹角角度的概念，正是由于这一点，使 $L^2(E)$ 比一般的 $L^p(E)(p\geqslant 1, p\neq 2)$ 更接近于欧氏空间.

在欧氏空间中两个向量的夹角的大小是通过内积来表现的，两个实向量(点) $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 之间的内积

$$\langle x, y\rangle=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

它和空间中向量的长度通过

$$\|x\|^2=\langle x, x\rangle$$

相联系. 向量 x 与 y 之间的夹角 θ 则可通过内积表达出来:

$$\cos\theta=\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

上面说的是实数域上的线性空间. 关于复数域上的欧氏空间(一般也称为酉空间)，对复向量

$$\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n),\quad \beta=(b_1, b_2, \cdots, b_n),$$

则定义它们的内积为

$$\langle\alpha, \beta\rangle=\sum_{i=1}^{n} a_i \bar{b}_i.$$

(关于欧氏空间与酉空间的初等性质可参见《高等代数》①)

现在对于 $f, g\in L^2(E)$，我们自然定义 f 和 g 的内积为

$$\langle f, g\rangle=\int_E f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{1}$$

由 $p=q=2$ 时的 Hölder 不等式(这时的 Hölder 不等式通常称为 Schwarz 不等式)，$f(x)\overline{g(x)}$ 是可积的，所以上述定义是合理的. 此处及以后 $\bar{\alpha}$ 都表示复数 α 的共轭. 内积是 $L^2(E)\times L^2(E)$ 上的一

① 北京大学数学系几何与代数教研室代数小组编，《高等代数》，第二版，高等教育出版社，第九章).

个复值函数,

$$\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}\quad (f\in L^2(E)). \tag{2}$$

(为简便计,我们把 L^2 中的范数 $\|\cdot\|_2$ 简记为 $\|\cdot\|$)而 Schwarz 不等式则说明

$$|\langle f,g\rangle|\leqslant\|f\|\cdot\|g\| \tag{3}$$

对任何 f, $g\in L^2(E)$ 都成立. 另外,只要 f,g, h 都属于 $L^2(E)$,便有

$$\langle f,g\rangle=\overline{\langle g,f\rangle}, \tag{4}$$

$$\langle \alpha f+\beta g,h\rangle=\alpha\langle f,h\rangle+\beta\langle g,h\rangle, \tag{5}$$

此处 α,β 可以是任意的复数.

定理 1(内积的连续性) 如果 $f_n\in L^2(E)$, $n=1, 2, 3, \cdots$, $\mathscr{L}\lim\limits_{n\to\infty} f_n=f$,则对于任意 $g\in L^2(E)$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}\langle f_n,g\rangle=\langle f,g\rangle. \tag{6}$$

更一般地,如果还有 $g_n\in L^2(E), n=1,2,3,\cdots, \mathscr{L}\lim\limits_{n\to\infty} g_n=g$,则

$$\lim_{n\to\infty}\langle f_n,g_n\rangle=\langle f,g\rangle \tag{7}$$

证明 显然只要证明(7). 注意

$$\langle f_n,g_n\rangle-\langle f,g\rangle=\langle f_n,g_n\rangle-\langle f,g_n\rangle+\langle f,g_n\rangle-\langle f,g\rangle$$
$$=\langle f_n-f,g_n\rangle+\langle f,g_n-g\rangle,$$

由(3)式便有

$$|\langle f_n,g_n\rangle-\langle f,g\rangle|\leqslant\|f_n-f\|\|g_n\|+\|f\|\|g_n-g\|,$$

由 §1 定理 6, $\lim\limits_{n\to\infty}\|g_n\|=\|g\|$,所以

$$\lim_{n\to\infty}|\langle f_n,g_n\rangle-\langle f,g\rangle|\leqslant\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|\cdot\lim_{n\to\infty}\|g_n\|$$
$$+\|f\|\lim_{n\to\infty}\|g_n-g\|=0,$$

这说明(7)式是成立的. 证完

在 n-维空间中,我们经常要引进坐标,那就是选取 n 个线性

无关的向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，然后将任意向量 e 都通过这 n 个向量的线性组合来表示．直角坐标系一般说来是比较方便的坐标系，此时

$$e=\langle e, e_1\rangle e_1+\langle e, e_2\rangle e_2+\cdots+\langle e, e_n\rangle e_n, \tag{8}$$

其中 $\langle e, e_i\rangle$ 是 e 和 e_i 的内积①，而

$$\langle e_i, e_j\rangle=0,\quad (i\neq j, i, j=1,2,\cdots,n)$$

$$\langle e_i, e_i\rangle=1,\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

现在让我们在 L^2 空间中来建立相应的概念．

定义 1 假设 S 是 L^2 空间中一点集，如果对于 S 中任何 f, g, $f\neq g$，都有 $\langle f, g\rangle=0$，则我们就说 S 是一**直交系统**，若于任意 $f\in S$，都有 $\|f\|=1$，则称 S 是一**正规系统**．如果 S 既是正规的又是直交的，则称 S 是一**正规直交系统**．

例 1 三角系统

$$T:\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \cdots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ \cdots \text{和}$$

$$T_c:\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ix},\cdots,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx},\cdots$$

都是 $L^2([-\pi,\pi])$ 上的正规直交系统，其中 $e^{inx}=\cos nx+i\sin nx$, $n=1,2,3,\cdots$.

证明 因为

$$|e^{inx}|^2=\cos^2 nx+\sin^2 nx=1,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx dx=0\quad \text{对任何 } m, n \text{ 皆成立}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx=\begin{cases}0, & \text{当 } m\neq n,\\ \pi, & \text{当 } m=n.\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx=\begin{cases}0, & \text{当 } m\neq n,\\ \pi, & \text{当 } m=n.\end{cases}$$

---

① 参见前引北大编《高等代数》第九章 §2.

并且 $e^{inx}\overline{e^{imx}}=e^{i(n-m)x}=\cos(n-m)x+i\sin(n-m)x.$

例 2 Chebyshev-Hermite 函数列

$$\varphi_k(x)=(-1)^k e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^k}{dx^k}e^{-x^2}, k=1,2,3,\cdots$$

是 $L^2(\mathbb{R}^1)$ 上的直交系统(但不是正规系统).

证明 首先注意

$$\frac{d^k}{dx^k}e^{-x^2}=P_k(x)e^{-x^2},$$

此处 $P_k(x)$是一 k 次多项式,因此

$$\frac{d^s}{dx^s}\left(e^{x^2}\frac{d^k}{dx^k}e^{-x^2}\right)=\frac{d^s}{dx^s}P_k(x)$$

在 $s\leqslant k$ 时为一$k-s$ 次多项式,而在 $s>k$ 时为零,特别是对一切 s 都有

$$\lim_{x\to\pm\infty}e^{-x^2}\frac{d^s}{dx^s}\left(e^{x^2}\frac{d^k}{dx^k}e^{-x^2}\right)=0.$$

于是对任意 $n>m$,由分部积分法,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(x)\overline{\varphi_m(x)}dx\\
&=(-1)^k\int_{-\infty}^{\infty}e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\cdot\frac{d^m}{dx^m}e^{-x^2}dx\ (k=m+n)\\
&=(-1)^{k+1}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2}\right)\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\frac{d^m}{dx^m}e^{-x^2}\right)dx\\
&=\cdots=(-1)^{k+m+1}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}e^{-x^2}\right)\\
&\cdot\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\left(e^{x^2}\frac{d^m}{dx^m}e^{-x^2}\right)dx\\
&=0.
\end{aligned}$$

这证明了$\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$的直交性.

例 3 Legendre 多项式序列

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,\quad n=0,1,2,\cdots$$

是 $L^2([-1,1])$ 上的直交系统.

证明 设 $y=(x^2-1)^n$, 则 $y'=2n(x^2-1)^{n-1}x$,

因此 $(x^2-1)y'=2nxy$, 于是应用求高阶导数的 Leibniz 公式①

$$(x^2-1)y^{(n+2)}+2xy^{(n+1)}-n(n+1)y=0.$$

这也就是说 $P_n(x)$ 满足方程

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n(x)\right]+n(n+1)P_n(x)=0,$$

于是对于任意 n,m,

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\left[P_n(x)\frac{dP_m(x)}{dx}-P_m(x)\frac{dP_n(x)}{dx}\right]\right\}$$

$$=P_n(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_m(x)}{dx}\right]-P_m(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}\right]$$

$$=m(m+1)P_n(x)P_m(x)-n(n+1)P_n(x)P_m(x)$$

$$=(m-n)(m+n+1)P_n(x)P_m(x).$$

将上式两边在 $[-1,1]$ 上积分, 注意左边的积分显然是零, 所以当 $n\neq m$ 时

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,dx=0.$$

由于 $P_n(x)$ 是实值函数, 这其实就是说 $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $L^2([-1,1])$ 上的直交系. 注意 $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$. 易见

$$\int_{-1}^{1}|P_0(x)|^2dx=2,\qquad \int_{-1}^{1}|P_1(x)|^2dx=\frac{2}{3},$$

① 江泽坚等,《数学分析》, 1964 年, 第二版, 人民教育出版社, 第 109—110 页.

$$\int_{-1}^{1}|P_2(x)|^2dx=\frac{2}{5},$$

这说明$\{P_n(x)\}_0^\infty$还不是正规系统.

定义 2 设$\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$是$L^2$中的一个正规直交系统，$f\in L^2$，则称

$$x_n=\langle f,\varphi_n\rangle,\quad n=1,2,\cdots$$

为f相对于坐标系统$\{\varphi_n\}$而言的坐标.

由于(8)式的关系，我们自然有兴趣考虑形如$\sum\limits_n\langle f,\varphi_n\rangle\varphi_n$的"级数". 在有限$n$-维欧氏空间中，由(8)式显然有

$$\|e\|^2=\langle e,e\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^n\langle e,e_i\rangle e_i,\sum_{i=1}^n\langle e,e_i\rangle e_i\right\rangle$$

$$=\sum_{i=1}^n|\langle e,e_i\rangle|^2. \tag{9}$$

一般说来，对于任意$m\leqslant n$及任意向量e，总有

$$\sum_{i=1}^m|\langle e,e_i\rangle|^2\leqslant\|e\|^2.$$

现在我们来证明在L^2空间中也有相似的结论.

定理 2 (Bessel 不等式)设

(1) $\{\varphi_n\}$是L^2中的正规直交系统，

(2) $f\in L^2$,

$$x_n=\langle f,\varphi_n\rangle,n=1,2,3,\cdots$$

则

$$\sum_{n=1}^\infty|x_n|^2=\sum_{n=1}^\infty|\langle f,\varphi_n\rangle|^2\leqslant\|f\|^2.$$

证明 对任意正整数N都有

$$0\leqslant\left\langle f-\sum_{i=1}^{N}x_i\varphi_i,\ f-\sum_{i=1}^{N}x_i\varphi_i\right\rangle$$

$$=\langle f,f\rangle-\sum_{i=1}^{N}\overline{x_i}\langle f,\varphi_i\rangle-\sum_{i=1}^{N}x_i\langle\varphi_i,f\rangle$$

$$+\sum_{i,j=1}^{N}x_i\overline{x_j}\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle$$

$$=\|f\|^2-2\sum_{i=1}^{N}|x_i|^2+\sum_{i=1}^{N}|x_i|^2=\|f\|^2-\sum_{i=1}^{N}|x_i|^2.$$

所以

$$\sum_{i=1}^{N}|x_i|^2\leqslant\|f\|^2,$$

因 N 是任意的，令 $N\to+\infty$ 便得

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2\leqslant\|f\|^2.$$

证完.

在酉空间中引进了坐标以后，一个点可以看作 n 个复数组成的有序数组，而任意一个由 n 个复数组成的有序数组也都是空间中一个点，可是这件事在 L^2 空间中却不简单，因为若 $\{x_1, x_2,\cdots, x_n,\cdots\}$ 代表 L^2 中某一点 f 的坐标，则从 Bessel 不等式即得

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2\leqslant\|f\|^2<+\infty.$$

可见 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^2$ 是收敛的．换言之，即欲使 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$ 是某一 $f\in L^2$ 的坐标，必须 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<+\infty$．可是当 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<+\infty$ 时，是

否一定在 L^2 中有一点 f 与之对应呢，即是否存在那样一个函数，它正好以 $\{x_i\}$ 作为它的坐标呢？关于这个问题，下面的定理给出肯定的回答.

定理 3(Riesz-Fisher **定理**) 设

(1) $\{\varphi_n\}$ 是 L^2 中一个正规直交系统，

(2) 复数序列 $\{x_i\}$ 使 $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<+\infty$，则有 $f\in L^2$ 以 $\{x_i\}$ 为它的坐标，即

$$\langle f,\varphi_i\rangle=x_i.\qquad i=1,2,3,\cdots$$

证明 如果我们令 $f_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\varphi_i$，则由于 $\{\varphi_i\}$ 的正规直交性，f_n 的前 n 个坐标恰好是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，而其余的坐标则都是 0. 以下我们来证明 $\{f_n\}$ 收敛于某一元素 f. 由于 L^2 是完全的，所以我们只要证明 $\{f_n\}$ 是基本序列即可。为此计算 f_n-f_m 的范数：

$$\|f_n-f_m\|^2=\left\langle\sum_{i=m+1}^{n}x_i\varphi_i,\ \sum_{i=m+1}^{n}x_i\varphi_i\right\rangle$$

$$=\sum_{i,j=m+1}^{n}x_i\overline{x_j}\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle=\sum_{m+1}^{n}|x_i|^2,\ (n>m)$$

可是 $\sum_{1}^{\infty}|x_i|^2$ 是收敛的，只要 m,n 充分地大，$\sum_{m+1}^{n}|x_i|^2$ 可以任意小，因此 $\{f_n\}$ 是一基本序列，从而有 $f\in L^2$ 使 $\mathscr{L}\mathrm{im}_{n\to\infty}f_n=f$. 显然 f 的坐标就是 $\{x_i\}$，因为对于任意 i，只要 $n\geqslant i$，就有 $\langle f_n,\varphi_i\rangle=x_i$，从而由定理 1 即得

$$\langle f,\varphi_i\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle f_n,\ \varphi_i\rangle=\lim_{n\to\infty}x_i=x_i.$$

定理证完.

我们引进坐标，是为了表示 L^2 中的点，因此，我们自然不希望两个不同的点有相同的坐标（坐标不同则点一定不同，这是没有问题的）．可见我们还必须对坐标系统 $\{\varphi_n\}$ 加上某些条件才行．也就是说希望 $\{\varphi_n\}$ 具有这样的性质，如果 f 和 g 是 L^2 中的两个不同的元素，即 $f(p)$ 不是和 $g(p)$ 几乎处处相等的函数，则 f 的坐标就不会和 g 的坐标完全一样，注意 $f-g$ 的坐标事实上就是 f 的坐标减 g 的坐标，因此如果 $f(p)-g(p)$ 不几乎处处等于零时，$f-g$ 的坐标就不全为零，则坐标的表示法就变成唯一的了，因此我们引进下列概念：

定义 3 设 $\{\varphi_n\}$ 是一正规直交系统，如果只有几乎处处是零的函数对 $\{\varphi_n\}$ 而言的坐标才全是零，则 $\{\varphi_n\}$ 就称为**完全系统**．

需要强调指出，在这里，我们并没有讨论完全系统的存在问题，也就是说是否存在完全系统我们还一点也不知道，以下的讨论都是在假定这种系统存在的前提下进行的．至于是否真的存在的问题，等到以后再来解决．

式(9)事实上是通过坐标来表示距离的距离公式，在 L^2 中也有类似的公式．

定理 4 （Parseval 定理）①设

(1) $\{\varphi_n\}$ 为完全正规直交系统，

(2) $f\in L^2$, $x_n=\langle f,\varphi_n\rangle$, $n=1,2,3,\cdots$,

则

$$\|f\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2.$$

证明 由 Bessel 不等式

---

① 首先指出定理中所述等式在数学分析与数学物理的各种问题中的重要意义的，是 V. I. s eklov，在他以前只知这个等式对三角系统成立，所以这个等式有时也按 steklov 的说法，叫做封闭方程式．

$$\|f\|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2,$$

所以$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ 是收敛的，于是由 Riesz-Fisher 定理的证明，知序列

$f_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i$ 有极限，设为 f^*，则由范数的连续性（§1定理6），

$$\|f^*\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i,\ \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i \right\rangle$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2.$$

可是 f^* 与 f 显然有相同的坐标，而我们又假设了系统 $\{\varphi_n\}$ 是完全的，因此 $f = f^*$，于是

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2.$$

定理得证.

在研究欧氏空间时，维数是由最大线性无关向量组中含有的向量的数目来决定的，也就是最大的正规直交系统中所含元素的个数来确定的. 现在我们自然也会要问 L^2 空间的维数是什么呢？首先我们来说明 L^2 空间绝对不会是有限维的，这只须证明不存在只包含有限多个元素的完全系统即可，因为一个系统 $\{\varphi_n\}$ 如果不是完全的，则它一定不是"最大"的，事实上，既然 $\{\varphi_n\}$ 非完全，就有非零的 $f \in L^2$，使 $\langle f, \varphi_n \rangle = 0$ $(n \geqslant 1)$. 令 $\varphi_0 = \dfrac{f}{\|f\|}$，则 $\|\varphi_0\| = 1$，$\langle \varphi_0, \varphi_i \rangle = 0$，$i = 1, 2, 3, \cdots$. 所以 $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots\}$ 是一个"更大" 的正规直交系.

定理 5 任何完全系统 $\{\varphi_n\}$ 中均有无穷多个元素.

证明 如若不然，即$\{\varphi_n\}$只有有限个元素

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m,$$

则每一$f \in L^2$都与一个由m个复数组成的数组$\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$对应，此处

$$x_i = \langle f, \varphi_i \rangle, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

且

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|^2.$$

如果我们把$\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$看成$m$维酉空间$\mathbb{C}^m$中的一个点，则我们得到了$L^2$和$\mathbb{C}^m$间的一个对应关系，因为$\{\varphi_n\}$是完全的，这个对应关系是一对一的，而且因为两个空间中的距离公式相同，所以相对应的向量的长度相同，即这个对应不变更向量间的度量关系，从而也应该不改变全部拓扑结构，即在$\mathbb{C}^m$中是聚点的，对应在L^2中也应该是聚点．特别是从$\mathbb{C}^m$是局部列紧的(Weierstrass-Bolzano聚点原则)应推出L^2也是局部列紧的．然而我们已知L^2不具有局部列紧性，所以产生了矛盾．这证明$\{\varphi_n\}$中必有无穷多个元素．

定理5告诉我们任意完全系统都包含无穷多个元素，事实上我们还可证明**任意完全系统都恰有可数多个元素**．因为我们可以证明

定理6 L^2中的任何正规直交系S都不能多于可数多个元素．

证明 因L^2是可分的，所以存在一个处处稠密的可数集合D，于任意$f \in S$，在D内应有f^*使$\|f - f^*\| < \sqrt{2}/4$．要证明定理，只需证明对于不同的$f, g \in S$，对应的f^*, g^*也不同就可以了．

由于S是正规直交系统，

$\|f-g\|^2 = \langle f-g, f-g \rangle$

$$=\langle f,f\rangle+\langle g,g\rangle-\langle f,g\rangle-\langle g,f\rangle$$
$$=2,$$

但是

$$\|f-g\|\leqslant\|f-f^*\|+\|f^*-g^*\|+\|g^*-g\|$$
$$<\frac{\sqrt{2}}{4}+\|f^*-g^*\|+\frac{\sqrt{2}}{4},$$

所以

$$\|f^*-g^*\|>\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}>0,$$

即 $f^*\neq g^*$. 证完.

在欧氏空间中，一组最大的正规直交向量$\{e_i\}$之所以称为基底，是因为空间中任意的 e 都可以用这一组特殊的向量的线性组合表示出来：

$$e=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n,$$

对于 L^2 空间，如果$\{\varphi_n\}$是其中的一个完全正规直交系统，则对于任意 $f\in L^2$,

$$f_n=\sum_{i=1}^{n}\langle f,\varphi_i\rangle\varphi_i,\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

就是在 L^2 中收敛(即平方平均收敛)于 f 的. 事实上，在定理 3 中已证明$\mathscr{L}\mathrm{im}_{n\to\infty}f_n=f^*$是存在的并且

$$\langle f^*,\varphi_i\rangle=\langle f,\varphi_i\rangle,\ i=1,2,3,\cdots.$$

而现在系统$\{\varphi_i\}$是完全的，所以 $f^*=f$，这样我们就可以把 f 表成

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,\varphi_i\rangle\varphi_i,$$

不过右边的级数是在 L^2 中收敛. 因此我们完全有理由把 L^2 中的

一个完全正规直交系统称为 L^2 中的**正规直交基底**.

在欧氏空间中要判断 $\{e_i\}$ 是基底，只要它的线性组合

$$e=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\cdots+\alpha_n e_n$$

的全体在空间中稠密就可以了.因为这样的 e 构成一线性子空间，如果它在空间中稠密，就必然是整个空间. 从而任何向量都可表成上述形式. 在 L^2 中，在空间中处处稠密的线性子空间未必等于 L^2，比如在区间[0, 1]上连续的函数的全体构成 $L^2([0,1])$ 的一个线性子空间 $C[0,1]$，由 §1 引理 1，它在 $L^2([0,1])$ 中处处稠密，但是 $C([0,1])\neq L^2([0,1])$. 因此下述定理并不是一目了然的.

定理 7 如果 $\{\varphi_n\}$ 是 L^2 中的正规直交系统，则 $\{\varphi_n\}$ 是 L^2 的一基底的充要条件是 $\{\varphi_n\}$ 中元素的有限线性组合在 L^2 中处处稠密.

证明 因为定理 4 的证明中所作的 f_n 都是 $\{\varphi_n\}$ 中元素的有限线性组合，所以必要性已知. 下证充分性. 对于任意 $f\in L^2$，由假设应有 $\{\varphi_n\}$ 中元素的一串有限线性组合 f_n，$n=1, 2, 3, \cdots$，使 $\mathscr{L}\mathrm{im}_{n\to\infty} f_n=f$. 如果 f 的坐标都是零，则 $\langle f,f_n\rangle=0$, $n=1,2,3,\cdots$，于是

$$\begin{aligned}\|f\|^2=\langle f,f\rangle&=\langle f,f\rangle-\langle f,f_n\rangle\\&=\langle f,f-f_n\rangle\leqslant\|f\|\|f-f_n\|.\end{aligned}$$

由于 $\|f-f_n\|\to 0$ $(n\to\infty)$，所以 $\|f\|^2=0$，从而 $f=0$，这说明 $\{\varphi_n\}$ 是完全的，即是 L^2 的一基底.

推论 1 如果 $\{\varphi_n\}$ 是 L^2 中一正规直交系统，则 $\{\varphi_n\}$ 是 L^2 中的基底的充要条件是对任意 $f\in L^2$，都有

$$\|f\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|\langle f,\varphi_i\rangle|^2.$$

证明 留作习题.

定理 8 (V.I.Steklov 定理) 设 $\{\varphi_n\}$ 是 L^2 中一基底，$\{\omega_n\}$ 是 L^2 中一正规直交系统，则 $\{\omega_n\}$ 也是一基底的充要条件是对每一 φ_i, $i=1,2,3,\cdots$ 都有

$$\|\varphi_i\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle\varphi_i,\omega_n\rangle|^2.$$

证明 从定理 4 知只需证明充分性. 对任意 $f\in L^2$, $\varepsilon>0$, 由于 $\{\varphi_n\}$ 是基底，由定理 7 应有 $\{\varphi_n\}$ 中元素的线性组合

$$g=a_1\varphi_1+\cdots+a_k\varphi_k,$$

使得

$$\|f-g\|<\varepsilon/2.$$

由于

$$\|\varphi_i\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle\varphi_i,\omega_n\rangle|^2,$$

若令

$$\varphi_n^{(i)}=\sum_{j=1}^{n}\langle\varphi_i,\omega_j\rangle\omega_j,$$

则

$$\langle\varphi_n^{(i)},\varphi_i\rangle=\sum_{j=1}^{n}\langle\varphi_i,\omega_j\rangle\langle\omega_j,\varphi_i\rangle$$

$$=\sum_{j=1}^{n}|\langle\varphi_i,\omega_j\rangle|^2,$$

$$\langle\varphi_n^{(i)},\varphi_n^{(i)}\rangle=\left\langle\sum_{j=1}^{n}\langle\varphi_i,\omega_j\rangle\omega_j,\sum_{j=1}^{n}\langle\varphi_i,\omega_j\rangle\omega_j\right\rangle$$

$$=\sum_{j,k=1}^{n}\langle\varphi_i,\omega_j\rangle\overline{\langle\varphi_i,\omega_k\rangle}\langle\omega_j,\omega_k\rangle$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\langle\varphi_i,\omega_j\rangle\overline{\langle\varphi_i,\omega_j\rangle}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}|\langle\varphi_i,\omega_j\rangle|^2.$$

所以当 $n\to\infty$ 时,

$$\|\varphi_i-\varphi_n^{(i)}\|^2=\langle\varphi_i-\varphi_n^{(i)},\varphi_i-\varphi_n^{(i)}\rangle$$

$$=\|\varphi_i\|^2-\langle\varphi_n^{(i)},\varphi_i\rangle-\langle\varphi_i,\varphi_n^{(i)}\rangle+\langle\varphi_n^{(i)},\varphi_i^{(i)}\rangle$$

$$=\|\varphi_i\|^2-\sum_{j=1}^{n}|\langle\varphi_i,\omega_j\rangle|^2\to 0,$$

于是对每一 $i=1,2,\cdots,k$, 都可选 n_i 充分大, 使

$$\|\varphi_i-\varphi_{n_i}^{(i)}\|<\frac{\varepsilon}{2k(|a_i|+1)},$$

从而对

$$h=\sum_{i=1}^{k}a_i\varphi_{n_i}^{(i)}$$

便有

$$\|g-h\|=\|\sum_{i=}^{k}a_i(\varphi_i-\varphi_{n_i}^{(i)})\|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{k}|a_i|\|\varphi_i-\varphi_{n_i}^{(i)}\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\|f-h\|\leqslant\|f-g\|+\|g-h\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

注意

$$h=\sum_{i=1}^{k}a_i\varphi_{n_i}^{(i)}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}a_i\langle\varphi_i,\omega_j\rangle\omega_j$$

是 $\{\omega_j\}$ 中元素的有限线性组合, $f\in L^2$ 及 $\varepsilon>0$ 都是任意的, 所以

$\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ 中元素的有限线性组合在 L^2 中稠密，由定理 7，$\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 L^2 的基底. 证完.

L^2 中的子集 S 称为是**一线性无关**的子集，如果 S 中任意有限个元素都是线性无关的，即对于 $f_1, \cdots, f_n \in S$. 如果有复数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 使

$$\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n = 0. \quad (*)$$

则必有 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. 显然任意正规直交系统都是 L^2 的线性无关子集. 因为若(*)式成立，$\{f_i\}$ 是正规直交系，则

$$0 = \langle \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n, f_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle f_j, f_i \rangle = \alpha_i.$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

又，对于 L^2 中任一子集 S，S 中元素的有限线性组合的全体所构成的集合是 L^2 的一线性子空间，称为由 S 所张开的子空间，记为 $\mathscr{L}(S)$.

定理 9(**Hilbert-Schmidt 正规直交化定理**). 如果 $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 L^2 中一线性无关的序列，则存在 L^2 中的正规直交序列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$，每一 φ_n 都是 $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中元素的有限线性组合且

$$\mathscr{L}(\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}) = \mathscr{L}(\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

证明 因 $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是线性无关序列，每一 ψ_n 都不为零. 令

$$\varphi_1 = \psi_1 / \|\psi_1\|,$$

则 $\|\varphi_1\| = 1$，$\psi_1 = \|\psi_1\| \varphi_1$. 由于 ψ_1, ψ_2 线性无关，所以

$$h_2 = \psi_2 - \langle \psi_2, \varphi_1 \rangle \varphi_1 = \psi_2 - (\langle \psi_2, \varphi_1 \rangle / \|\psi_1\|) \psi_1 \neq 0.$$

于是可令 $\varphi_2 = h_2 / \|h_2\|$，于是 $\|\varphi_2\| = 1$，

$$\langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle = \frac{1}{\|h_2\|} (\langle \psi_2 - \langle \psi_2, \varphi_1 \rangle \varphi_1, \varphi_1 \rangle)$$

$$= \frac{1}{\|h_2\|} (\langle \psi_2, \varphi_1 \rangle - \langle \psi_2, \varphi_1 \rangle \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle) = 0.$$

$$\psi_2 = \|h_2\| \varphi_2 + \langle \psi_2, \varphi_1 \rangle \varphi_1.$$

所以不仅 φ_2 是 ψ_1,ψ_2 的线性组合，ψ_2 也是 φ_1,φ_2 的线性组合．

一般说来，设已有正规直交的

$$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\ \varphi_n,$$

使每一 φ_i 都是 $\psi_1,\ \cdots,\ \psi_i$ 的线性组合，每一 ψ_i 也都是 $\varphi_1,\cdots,\varphi_i$ 的线性组合，$i=1,2,\ \cdots,\ n$，则由于 $\sum_{i=1}^{n}\langle\psi_{n+1},\varphi_i\rangle\varphi_i$ 是 $\psi_1,\cdots,\psi_n$ 的线性组合，而 $\{\psi_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是线性无关的，所以

$$h_{n+1}=\psi_{n+1}-\sum_{i=1}^{n}\langle\psi_{n+1},\varphi_i\rangle\varphi_i\neq 0.$$

定义

$$\varphi_{n+1}=h_{n+1}/\|h_{n+1}\|,$$

这是 $\psi_1,\cdots,\psi_{n+1}$ 的线性组合，综合前面两个式子便有

$$\psi_{n+1}=\|h_{n+1}\|\varphi_{n+1}+\sum_{i=1}^{n}\langle\psi_{n+1},\varphi_i\rangle\varphi_i,$$

所以 ψ_{n+1} 也是 $\varphi_1,\cdots,\varphi_{n+1}$ 的线性组合，又

$$\langle\varphi_{n+1},\varphi_j\rangle=\frac{1}{\|h_{n+1}\|}\left(\left\langle\psi_{n+1}-\sum_{i=1}^{n}\langle\psi_{n+1},\varphi_i\rangle\varphi_i,\varphi_j\right\rangle\right)$$

$$=\frac{1}{\|h_{n+1}\|}(\langle\psi_{n+1},\varphi_j\rangle-\langle\psi_{n+1},\varphi_j\rangle)=0.$$

$$(j=1,2,\cdots,n)$$

$$\|\varphi_{n+1}\|=1.$$

这样，由归纳法，我们就得到了一个正规直交序列 $\{\varphi_n\}$，每一 φ_n 都是 $\psi_1,\cdots,\psi_n$ 的线性组合，而每一 ψ_n 也都是 $\varphi_1,\cdots,\ \varphi_n$ 的线性组合．因此

$$\mathscr{L}(\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty})=\mathscr{L}(\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

证完．

到现在为止，我们还没有证明在 L^2 中是否存在完全的正规直

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝实变函数论　　（第二版）
作者＝江泽坚　　吴智泉
页数＝３０５
ＳＳ号＝１００６９４５８
出版日期＝１９９４年０６月第２版

封面页
书名页
版权页
前言页
目录页
第二版说明
第一版序
第一章 集合及其基数
1 集合及其运算
2 集合的基数
3 可数集合
4 不可数无穷集
第二章 n 维空间中的点集
1 聚点、内点、边界点、Bolzano-Weierstrass 定理
2 开集、闭集与完备集
3 P 进位表数法
4 一维开集、闭集、完备集的构造
5 点集间的距离
第三章 测度理论
1 外测度
2 可测集合
3 开集的可测性
4 乘积空间
5 集合环上的测度的扩张
第四章 可测函数
1 可测函数的定义及其简单性质
2 Egoroff 定理
3 可测函数的结构 Lusin 定理
4 依测度收敛
第五章 积分理论
1 非负函数的积分
2 可积函数
3 Fubini 定理
4 微分与不定积分
5 一般测度空间上的 Lebesgue 积分
第六章 函数空间 Lp
1 空间 Lp
2 Hilbert 空间 L2
3 Zorn 引理 L2中基底的存在性
第七章 Fourier 级数与 Fourier 变换
1 Fourier 级数的收敛判别
2 Fourier 级数的 C-1求和
3 L1(R1)上的 Fourier 变换

4　L2(R1)上的 Fourier 变换
参考书目与文献
索引
附录页